

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
H. GEIGER

107. BAND. 9. UND 10. HEFT

MIT 42 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 25. NOVEMBER 1937)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1937

Die

Zeitschrift für Physik

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstände der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Auch verpflichtet sich der Autor, die Arbeit nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen.

Manuskriptsendungen sind an die Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24, zu richten.

Die Autoren erhalten eine Fahrenkorrektur. Eine 2. (Umbruch-) Korrektur wird nur auf ausdrücklichen Wunsch übersandt, weil dadurch in der Regel das Erscheinen der Arbeit erheblich verzögert wird.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satz-kosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei zur Verfügung.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24.

Aufnahmebedingungen.

Nur solche Arbeiten können in die Zeitschrift für Physik aufgenommen werden, die den folgenden

Richtlinien

genügen:

1. Die Arbeit muß dem Gebiete der experimentellen oder theoretischen Physik angehören. Auch Arbeiten aus Nachbargebieten können aufgenommen werden. Ausgeschlossen sind jedoch Arbeiten mit rein mathematischem, astronomischem, mineralogischem oder chemischem Inhalt.

2. Die Einleitung der Arbeit soll den Leser in knappen Sätzen in die Vorgeschichte des Problems einführen. Je stärker ein Problem im Vordergrund des Interesses steht, desto kürzer kann die Einleitung gehalten werden.

3. Das Ziel der Arbeit muß schon in der Einleitung klar ausgesprochen werden. Es soll dabei auch ersichtlich sein, inwieweit die Erreichung des gesteckten Zieles einen im Rahmen der heutigen Physik wertvollen wissenschaftlichen Fortschritt bedeutet.

4. Die Beschreibung von Versuchsapparaten soll sich keinesfalls in technische Einzelheiten verlieren. Nur apparative Neuheiten von grundsätzlicher Bedeutung sind von Interesse. Die bildliche Wiedergabe von Apparaten soll durch schematische Zeichnung, nicht durch Photographie erfolgen.

5. Es ist fast immer ausreichend, von den Meßreihen ein typisches Beispiel herauszugreifen. An diesem Beispiel soll aber ersichtlich bzw. kontrollierbar sein, wie die Auswertung erfolgt ist, wie die Rechnungen durchgeführt wurden, welche Korrekturen angebracht sind usw.

6. Die Meßergebnisse sind *entweder* in Tabellen *oder* in Kurven wiederzugeben. Nur in Ausnahmefällen kann es gerechtfertigt sein, dasselbe Zahlenmaterial sowohl in Tabellen wie in Kurvenform zu veröffentlichen.

7. Die Lesbarkeit einer Arbeit gewinnt sehr, wenn die Figuren und Tabellen durch gut durchdachte Beschriftung an sich schon verständlich sind. Jedenfalls sollen alle Figuren und Tabellen mit Unterschriften bzw. Überschriften versehen sein.

8. In theoretischen Arbeiten sollen die mathematischen Ausführungen gerade so ausführlich veröffentlicht werden, daß der Leser die vom Verfasser überwundenen Schwierigkeiten nicht nochmals von neuem überwinden muß. Elementare Rechnungen dürfen nur ganz kurz angedeutet werden. In Zweifelsfällen empfiehlt es sich, Zwischenrechnungen als Anhang in kleinem Druck zu bringen.

9. Die Diskussion der Ergebnisse und die sonstigen allgemeinen Erörterungen sollen in ihrer Ausführlichkeit dem Umfang der in der Arbeit gewonnenen neuen Erkenntnisse entsprechen. Eine kurze Meßreihe berechtigt noch nicht dazu, einen großen Fragenkomplex lehrbuchartig aufzurollen.

10. Jede Arbeit muß in sich abgeschlossen sein. Arbeiten, welche allein auf einen Versuchsvorschlag oder nur auf eine Verbesserung von Meßverfahren oder Meßinstrumenten abzielen, können in der Regel nicht aufgenommen werden.

11. Dissertationen oder Habilitationsschriften können nicht in voller Breite aufgenommen werden. Nur solche Auszüge werden veröffentlicht, die den vorliegenden Richtlinien entsprechen. Die Auszüge sind in einer Fußnote als gekürzte Dissertation usw. zu kennzeichnen.

12. Am Kopf jeder Arbeit soll eine Inhaltsangabe in Kleindruck stehen. In diese Inhaltsangabe sollen vor allem die Punkte aufgenommen werden, welche der Verfasser als seine neuen Ergebnisse und damit als den durch seine Arbeit erzielten wissenschaftlichen Fortschritt ansieht.

Der Herausgeber: H. Geiger.

Lichtanregung durch Wasserstoff- und Deuteriumkanalstrahlen *).

Von Richard Junkelmann †.

Mit 20 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Juli 1937.)

Die Anregung von He durch H- und D-Kanalstrahlen wurde im Bereich von 8 bis 50 kV gemessen. Die Linie 3888 Å besitzt einen steilen Intensitätsanstieg. Bei gleicher Geschwindigkeit regen die D-Atome besser an als die H-Atome; bei gleicher Energie ist es umgekehrt. — Diese Tatsache steht in Einklang mit den Aussagen einer auf Grund anderer Kanalstrahluntersuchungen aufgestellten Arbeitshypothese von Döpel. — Das bewegte Leuchten der H-(D-)Atome wird durch Zusammenstoß mit He-Teilchen gestört. Diese Störung konnte durch Variation des He-Druckes ermittelt werden. Die gemessenen Intensitäten der Wasserstofflinien wurden auf die Störung „0“ korrigiert. Der Auslöschungsquerschnitt wurde berechnet. Er beträgt ein Vielfaches des gaskinetischen Querschnittes. — Dann wurde die Anregung von Argon durch H- und D-Stoß studiert; die Anregungsfunktionen der Bogenlinien zeigen ein Maximum. Dieses liegt bei Anregung durch H bei kleineren Spannungen und bei größeren Geschwindigkeiten als bei D-Stoß. Das Ergebnis wird auf Grund des Döpelschen Modells diskutiert. Zuletzt wurde die Anregung von H_2 durch H und D bzw. umgekehrt studiert.

Einleitung.

A. Problemstellung und Ziel der Arbeit.

Die Lichtanregung durch Stoß schwerer Partikel ist im Gegensatz zur Lichtanregung durch Elektronen noch wenig geklärt. Die Verhältnisse bei Elektronenanregung liegen aus verschiedenen Gründen sehr einfach. Dafür gibt es bei der Anregung durch Atome und Ionen viel mehr Variationsmöglichkeiten. Daher kann man aus Versuchen mit Atomstoß- und Ionenstoß auch mehr schließen als aus Versuchen mit Elektronenstoß.

Die wichtigste Fragestellung dieser Arbeit war folgende: Ist die Anregung eine Funktion der Geschwindigkeit (Impuls) oder der Energie der Teilchen. Döpel¹⁾ hat die Ansicht ausgesprochen, daß die Anregung weder eine reine Funktion der Geschwindigkeit, noch eine reine Funktion der Energie ist, und auf Grund eines einfachen Modells eine Theorie der Energieübertragung bei Korpuskularstoß entwickelt. Er stützt sich dabei auf Untersuchungen der gegenseitigen Lichtanregung von Partnern verschiedener Masse und Anregungsenergie, z. B. von Helium und Quecksilber durch

*) Gekürzte Dissertation.

¹⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. **16**, 1, 1933.

Wasserstoff. Die Schwierigkeit dabei ist, daß sich Helium und Quecksilber durch zwei Größen unterscheiden, durch die Masse und durch die Anregungsenergie, und daß beide Größen in die Döpelsche Theorie eingehen. Daher kann man aus solchen Experimenten nur grobe qualitative Schlüsse ziehen.

Der entscheidende Schritt, der in dieser Arbeit gemacht wurde, bestand in der Wahl der Isotope Wasserstoff und Deuterium als Teilchen verschiedener Masse (also bei gleicher Energie verschiedener Geschwindigkeit), aber gleicher Elektronenhülle (also gleicher Anregungsenergie) als Stoßpartner. Der Vergleich der Lichtanregung von Edelgasen durch Wasserstoff- und Deuteriumkanalstrahlstoß erlaubt eine genaue und sogar teilweise quantitative Prüfung der Theorie. Die Frage der vorliegenden Arbeit war zunächst die, wie unterscheidet sich die Anregung des Heliums durch H-Atome von der Anregung des Heliums durch D-Atome. Dabei wurde einmal das ruhende Leuchten des Heliums und dann das bewegte Leuchten des Wasserstoffs bzw. des Deuteriums untersucht. Als zweites Gas wurde Argon angeregt, um die Wechselwirkung bei größerem Massenunterschied der Stoßpartner zu studieren.

B. Apparatur.

Die Untersuchungen wurden mit Kanalstrahlen von 8 bis 50 kV ausgeführt. Sie wurden in einer gewöhnlichen, in Fig. 1 skizzierten, Kanalstrahlapparatur erzeugt. Als Kathode diente eine Gastrennungskathode, wie sie erstmals von W. Wien mit Erfolg ausprobiert worden ist.

Ein Hochspannungstransformator lieferte die erforderliche Spannung, die mittels zweier Glühventile und zweier Kapazitäten von 3000 cm in Greinacher Doppelschaltung gleichgerichtet wurde. Die Spannung wurde teils mit einer Funkenstrecke und einem Hochspannungsvoltmeter nach Starke-Schröder und teils niederspannungsseitig gemessen.

Der Wasserstoff und das Deuterium wurden mittels elektrisch geheizter Palladiumröhrchen in das Beschleunigungsrohr eingeleitet. Palladiumröhrchen und elektrischer Ofen wurden zu diesem Zweck in einem Glasgefäß eingeschmolzen, das jeweils mit Wasserstoff oder Deuterium gefüllt war. Der Gasstrom konnte auf einfache Weise durch stärkeres oder schwächeres Heizen des Öfchens reguliert werden. Der Wasserstoff wurde einem Kippschen Apparat entnommen. Das Deuterium wurde durch Elektrolyse¹⁾ in einem kleinen U-Rohr hergestellt.

Zur Untersuchung des emittierten Lichtes des Kanalstrahles wurde ein Zeiss-Dreiprismenspektrograph vom Öffnungsverhältnis 1 : 4,5 benutzt.

¹⁾ F. Norling, Phys. ZS. **36**, 711, 1935.

Wegen der geringen zur Verfügung stehenden Deuteriummenge mußten die Belichtungszeiten auf das äußerste (10 bis 40 Minuten) reduziert werden. Als Plattenmaterial wurden Agfa-Spektralblau-ultrarapid-Platten verwandt.

Bei hohem Gasdruck treten bei Helium als angeregtem Gas viele Linien auf. Um aber Sekundäreffekte auszuschneiden, mußte der Druck gering sein ($< 3,5 \cdot 10^{-3}$). Bei niedrigeren Spannungen war nur noch die Orthoheliumlinie $2^3S - 3^3P$ 3888 Å gut registrierbar. Die Untersuchung am Helium beschränkte sich auf diese Linie.

Der unzerlegt benutzte Kanalstrahl bestand natürlich aus einem Gemisch von Atomen und Ionen verschiedener Geschwindigkeit. Nun findet Döpel¹⁾, daß die Anregung bei einem He-Druck unter 0,05 mm Hg fast ausschließlich durch die neutralen Atome des Kanalstrahles erfolgt und die Anregung durch Protonen und Sekundärelektronen vernachlässigt werden kann.

Bei einer Energie von 30 kV wird Helium durch neutrale Atome mindestens zehnmal stärker angeregt als durch Protonen. Da die Protonenzahl etwa 10% der neutralen Teilchen betrug, ist also der Intensitätsanteil nur 1%, so daß jene nicht in Betracht kommen.

Um die Anregungsfunktion, die Abhängigkeit der Intensität einer Spektrallinie von der Energie des anregenden Teilchens zu erhalten, regt man ein Gas mit Teilchen verschiedener Energie an und hat dabei die relative Zahl der Teilchen und die relative Intensität der zu untersuchenden Spektrallinie zu bestimmen. Die letztere mißt man photographisch-photometrisch. Die Bestimmung der Teilchen ist dagegen schwierig. Eine Messung im Auffänger, wie bei Elektronenstoß, kommt hier nicht in Frage. Die wenigen Protonen, die der Kanalstrahl besitzt und die allein im Auffänger wirksam wären, kommen ja, wie mehrmals untersucht wurde, für die Anregung nicht in Betracht¹⁾. Kennt man aber das Verhältnis der neutralen Atome

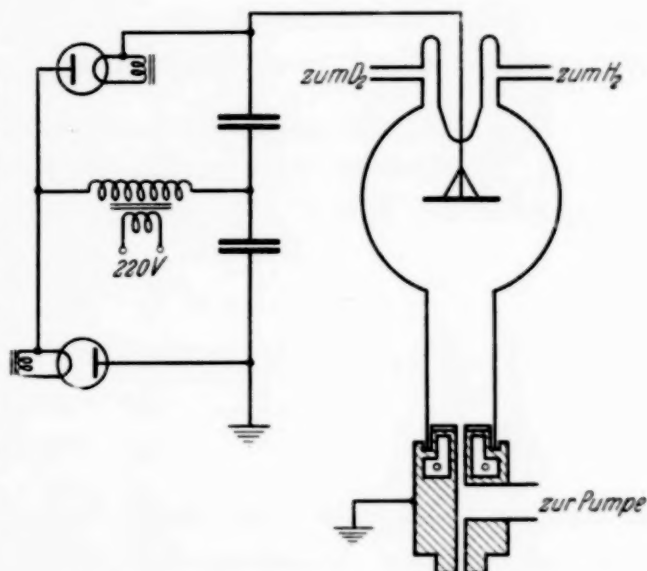


Fig. 1. Hochspannungsquelle und Kanalstrahlapparat.

¹⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. 16, 1, 1933.

zu den Protonen, so kann man die Zahl der neutralen Atome daraus bestimmen. Zu diesem Zweck läßt man den gesamten Strahl auf ein Thermoelement fallen und mißt die kinetische Energie Atome + Protonen. Dann zieht man die Protonen mit Hilfe eines starken elektrischen Feldes aus dem Strahl heraus und mißt die Energie der Atome allein. Mit einem das Thermoelement umgebenden Auffänger erhält man den Strom der Protonen. Daraus berechnet sich die Zahl der pro Sekunde auffallenden neutralen Atome. Diese Methode ist längst nicht so einwandfrei wie die Bestimmung eines Elektronenstromes im Auffänger, weshalb noch eine Teilchenzahlberechnung zum Vergleich angewandt wurde.

Sei n_0 die Zahl der pro Sekunde auffallenden neutralen Teilchen, V die von ihnen durchlaufene Spannung, e die Elementarladung, t die erzeugte Thermospannung, R und A Konstante, dann ist:

$$neV = Rt,$$

also

$$n = \frac{Rt}{eV} \quad \text{oder} \quad n = A \frac{t}{V},$$

die Zahl der Teilchen ist somit direkt proportional dem durch die Thermospannung erzeugten Ausschlage des Galvanometers und umgekehrt proportional der durchlaufenen Spannung.

So kann man aus der Thermospannung und Voltenergie die Zahl der gesamten Kanalstrahlteilchen bis auf eine von der Spannung unabhängige Konstante A bestimmen. Aus dem Verhältnis der geladenen und der neutralen Teilchen erhält man die Zahl der neutralen Atome ebenfalls bis auf die Konstante A .

Mit dieser so erhaltenen Relativzahl der Atome dividiert man die aus dem Photogramm entnommene relative Intensität der Spektrallinie. Das Ergebnis ist die relative Lichtausbeute eines stoßenden Atoms in einem von der Spannung unabhängigen Maße.

Die an den Kanal angesetzte Apparatur zur Bestimmung der Anregungsfunktion zeigt Fig. 2. Der Beobachtungsraum bestand aus einem Eisenrohr, das dicht hinter der Kanalöffnung den Ablenkpole des elektrischen Feldes enthielt; es folgte dann das Beobachtungsfenster und am Ende der abgeschirmte Auffänger, der im Inneren das Thermoelement trug. Damit die Messung des Verhältnisses bei dem Gasdruck ($3,5 \cdot 10^{-3}$) nicht durch Umladungen gefälscht würde, wurde die Ausdehnung des ablenkenden

Feldes möglichst klein gemacht. Der Querschnitt des in einem isolierenden Rohre befindlichen Poles betrug 2 mm. Als Spannungsquelle für das elektrische Ablenkungsfeld wurde ein Gleichrichter benutzt, der 4000 Volt gab.

Ein mit einem Röhrchen von 1 mm lichter Weite ausgeblendeter Strahl wurde in mit Aktivkohle unter flüssiger Luft gereinigtes Helium von $3,5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg Druck geschossen. Der leuchtende Strahl wurde mit einem achromatischen Kondensor auf den Spalt des Spektrographen abgebildet. Es wurden zunächst mit Wasserstoff bei verschiedenen Spannungen mehrere Aufnahmen auf eine Platte aufgenommen und auf die gleiche Platte ebensoviele mit Deuterium, bei ungefähr analogen Spannungen. Zwischen beiden Serien lag eine Pause von $\frac{1}{2}$ bis 1 Stunde, während welcher die Apparatur mit großer Energie mit Deuterium betrieben wurde, wobei starke Wärmeentwicklung auftrat; diese sollte eine Ausheizung bewirken, um nach Möglichkeit den leichten Wasserstoff, der sich in die Glaswand und Anode eingelagert hatte, zu entfernen. So wurden, wie Kontrollaufnahmen zeigten, sauber definierte Verhältnisse geschaffen. Die jeweiligen Aufnahmespannungen wurden durch den Wasserstoffdruck im Entladungsrohr eingestellt.

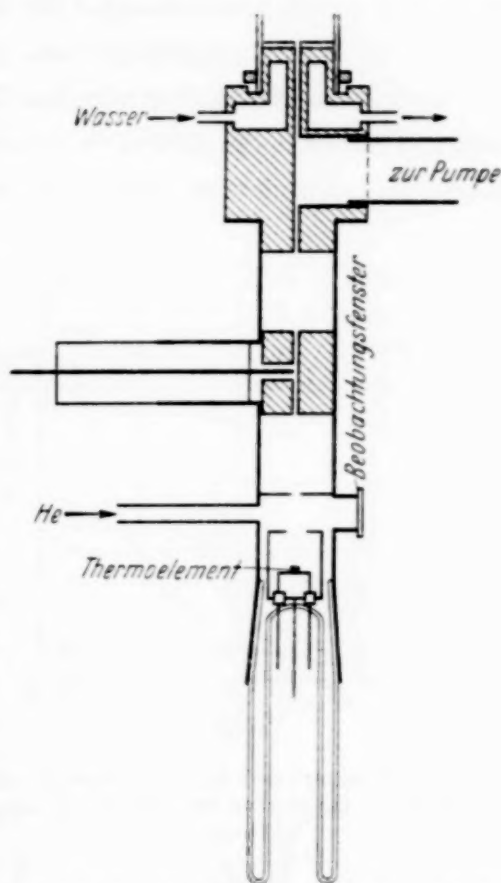


Fig. 2. Apparatur zur Bestimmung der Anregungsfunktion.

C. Anregung von Helium bei H- und D-Stoß.

Das Ergebnis von ungefähr 70 Einzelaufnahmen zeigen Fig. 3 und 4. Um ein anschauliches Bild vom Verlauf der beiden Anregungen zu gewinnen, wurde die relative Intensität $I = f(E)$ aufgetragen (E = Energie der Stoßteilchen). Dabei wurde als Abszisse nicht die an das Kanalstrahlrohr angelegte Spannung gewählt, sondern die Beschleunigungsspannung, die etwa 63% der angelegten Spannung beträgt¹⁾. Den beiden

¹⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. 76, 1, 1925.

Kurven $I = f(E_H)$ und $I = f(E_D)$ entnimmt man nun folgendes Ergebnis: Die Anregung durch H ist größer als die durch D bei gleicher Energie. Daß die beiden Kurven unter 10 kV sich berühren, liegt wohl innerhalb der Fehlergrenzen. Da bekanntlich das Deuterium die doppelte Masse des Wasserstoffatoms hat, muß entsprechend die Geschwindigkeit des Deuteriumatoms bei gleicher Energie kleiner sein. Es liegt deshalb nahe, die geringere Anregung der kleineren Geschwindigkeit (v) zuzuschreiben. Trägt man nun $I = f(v)$ auf, d. h. die Intensität als Funktion

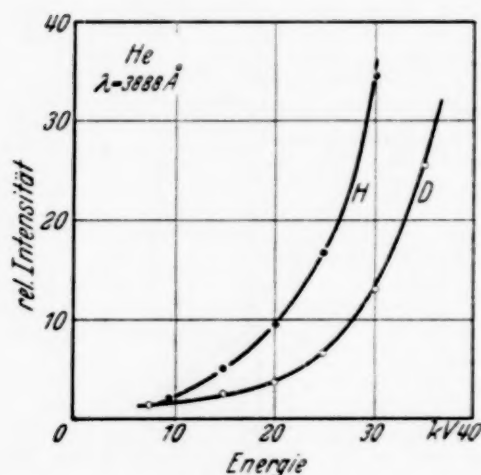


Fig. 3. Anregung der He-Linie 3888 Å als Funktion der kinetischen Energie der H- bzw. D-Atome.

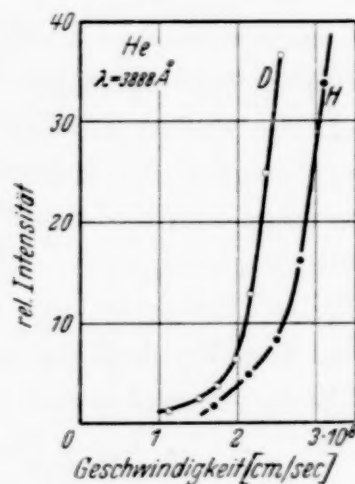


Fig. 4. Anregung der He-Linie 3888 Å als Funktion der Geschwindigkeit der H- bzw. D-Atome.

der Geschwindigkeit v , so sieht man, daß bei gleicher Geschwindigkeit jetzt die Anregung durch D-Stoß größer ist als durch H-Stoß. Eine Deutung dieser Ergebnisse folgt weiter unten.

D. Anregung von Argon durch H- und D-Stoß.

Die Versuchsanordnung war die gleiche wie beim Helium. Die Untersuchung beschränkte sich auf das „blaue“ Argonspektrum von etwa 4000 bis 4800 Å. Da das Spektrum aus verhältnismäßig vielen Linien besteht, wurde der oben erwähnte Zeiss-Dreiprismenspektrograph mit einem Öffnungsverhältnis 1:4,5 verwandt. Bei einer Belichtungszeit von 30 Minuten wurden 17 Bogen- und 20 Funkenlinien angeregt.

Es wurden die Bogenlinien 4045,9, 4164,1, 4181,8, 4259,3 und 4266,2 Å untersucht (siehe Fig. 5 bis 14). Es sind dies Linien, die der starken violetten Gruppe mit den Kombinationen $1s_i - 3p_k$ angehören. Anregungsfunktionen

von Linien dieser Gruppe mit Elektronenstoß sind von Hanle und Fischer¹⁾ und Fischer²⁾ gemessen worden.

Dort wurde gefunden, daß Triplett- und Singulettlinien einen etwas verschiedenen Verlauf haben. Etwas ähnliches trat bei Korpuskularstoß, wie aus den folgenden Figuren zu ersehen ist, nicht auf.

Dies mag zum Teil auch damit zusammenhängen, daß die Elektronenstoß-Anregungsfunktion mit Elektronen von einheitlicher Geschwindigkeit gemessen wurde, während dies in vorliegender Arbeit bei den H- und

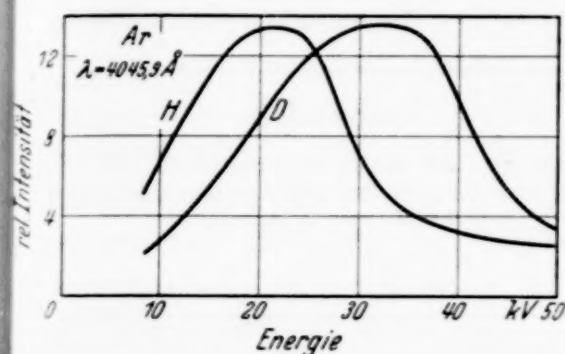


Fig. 5. Anregung der Argonlinie 4045,9 Å ($1s_4 - 3p_2$) als Funktion der kinetischen Energie der H- bzw. D-Atome.

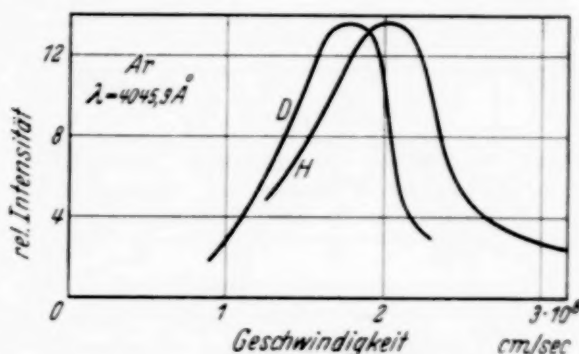


Fig. 6. Anregung der Argonlinie 4045,9 Å ($1s_4 - 3p_2$) als Funktion der Geschwindigkeit der H- bzw. D-Atome.

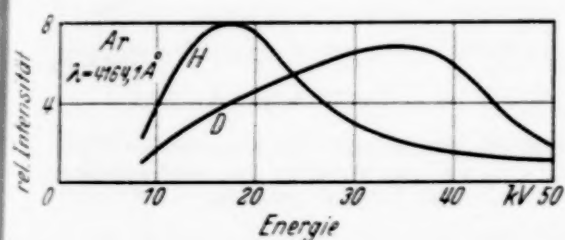


Fig. 7. Anregung der Argonlinie 4164,1 Å ($1s_4 - 3p_7$) als Funktion der kinetischen Energie der H- bzw. D-Atome.

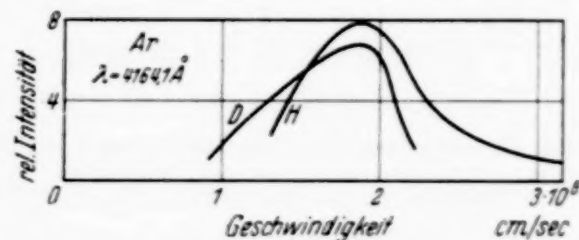


Fig. 8. Anregung der Argonlinie 4164,1 Å ($1s_4 - 3p_7$) als Funktion der Geschwindigkeit der H- bzw. D-Atome.

D-Korpuskeln nicht der Fall war. Aus Intensitätsgründen mußte auf eine Zerlegung des Strahles und Ausblendung in Teilchen gleicher Geschwindigkeit verzichtet werden, so daß sich der Strahl aus Teilchen eines ganzen Geschwindigkeitsbereiches zusammensetzte, dessen Maximum bei der angelegten Beschleunigungsspannung lag. Dies hat aber zur Folge, daß der Verlauf der Anregungsfunktionen etwas verwaschen wird, was sich besonders bei höheren Spannungen über 30 kV bemerkbar macht. Teilchen von 40 kV regen nicht so stark an, wie solche von 30 kV; da aber letztere

¹⁾ W. Hanle u. O. Fischer, ZS. f. wiss. Photogr. Bd. 3—6, S. 141. —

²⁾ O. Fischer, ZS. f. Phys. 86. 646. 1933.

in erheblichem Maße im 40 kV-Kanalstrahl enthalten sind, liegt dort der Wert der Anregungsfunktion zu hoch. Bei noch höheren Spannungen sinkt dieser Fehler wieder, da der Strahl dann an Homogenität zunimmt.

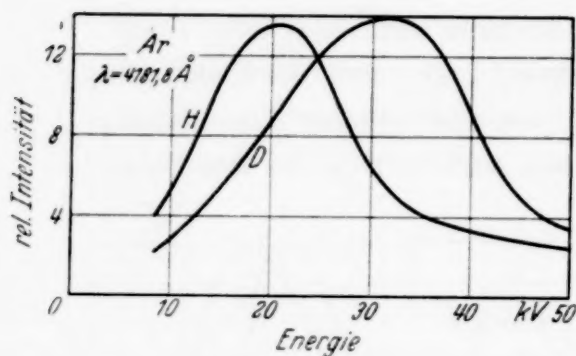


Fig. 9. Anregung der Argonlinie 4181,8 Å ($1s_2 - 3p_2$) als Funktion der kinetischen Energie der H- bzw. D-Atome.

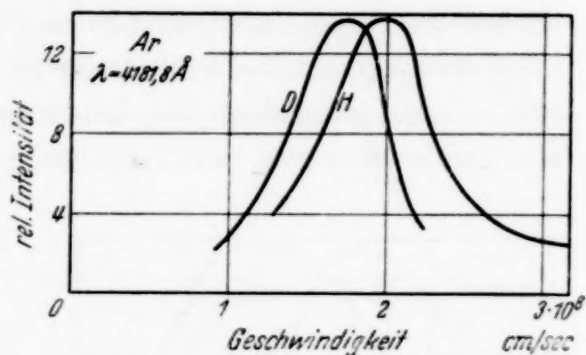


Fig. 10. Anregung der Argonlinie 4181,8 Å ($1s_2 - 3p_2$) als Funktion der Geschwindigkeit der H- bzw. D-Atome.

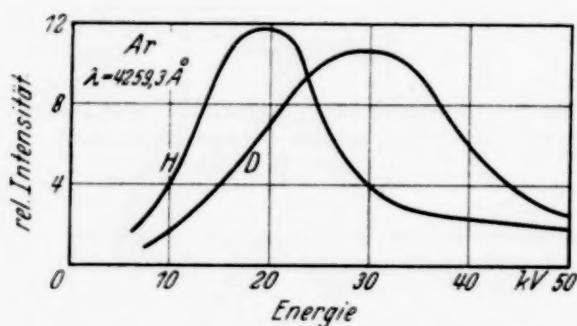


Fig. 11. Anregung der Argonlinie 4259,3 Å ($1s_2 - 3p_1$) als Funktion der kinetischen Energie der H- bzw. D-Atome.

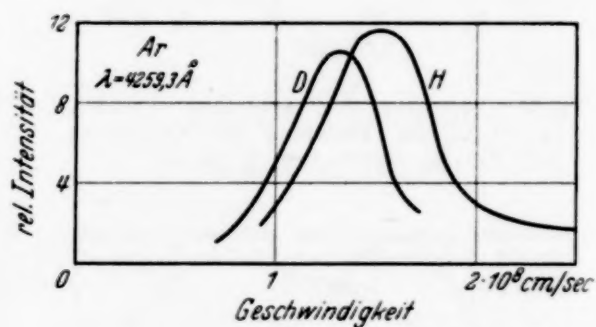


Fig. 12. Anregung der Argonlinie 4259,3 Å ($1s_2 - 3p_1$) als Funktion der Geschwindigkeit der H- bzw. D-Atome.

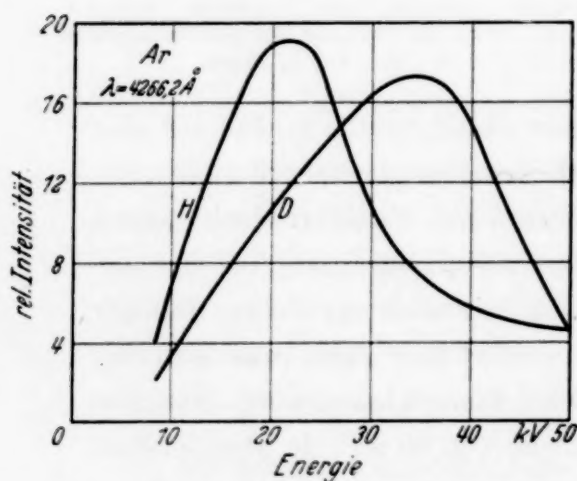


Fig. 13. Anregung der Argonlinie 4266,2 Å ($1s_4 - 3p_6$) als Funktion der Energie der H- bzw. D-Atome.

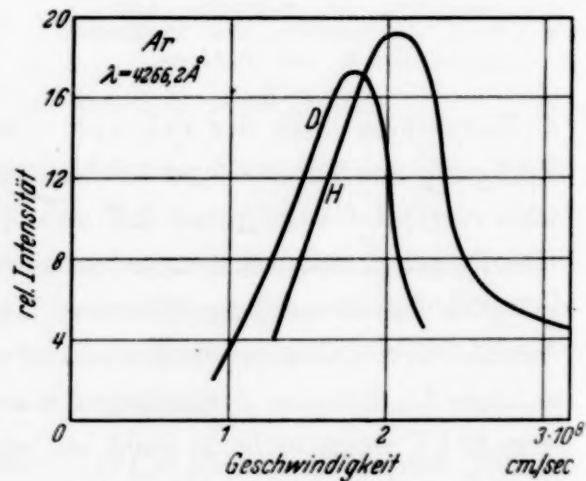


Fig. 14. Anregung der Argonlinie 4266,2 Å ($1s_4 - 3p_6$) als Funktion der Geschwindigkeit der H- bzw. D-Atome.

In Fig. 15 ist die Anregungsfunktion einer Funkenlinie, angeregt durch H- und D-Stoß, zu sehen. Die Anregungsspannung dieser Linie liegt bei 35 Volt. Dagegen ist die Ablösearbeit eines Wasserstoffelektrons klein. Man sollte also meinen, daß in dem benutzten Spannungsbereich überhaupt keine Argon-Funkenlinien angeregt werden. Daß die Anregung nicht durch Wasserstoffionen erfolgt, wurde nachgeprüft, indem die geladenen Teilchen mit einem kurzen starken elektrischen Felde aus dem Kanalstrahl herausgezogen wurden. Die Funkenlinien traten auch dann noch auf¹⁾. Ihr Erscheinen muß demnach anders erklärt werden.

Bei Anregung des He konnte kein Maximum erreicht werden, doch wird dieses bei etwa 100 kV vermutet. Das Maximum der Anregung von Ar durch H und D liegt bei 20 bis 30 kV. Da Helium eine Anregungsspannung von 21,0 Volt besitzt und Argon eine solche von 14,4 Volt, ist zu vermuten, daß Neon, dessen Anregungsspannung zwischen den Werten dieser beiden Gase liegt, auch ein Maximum zwischen denen von Helium und Argon besitzt.

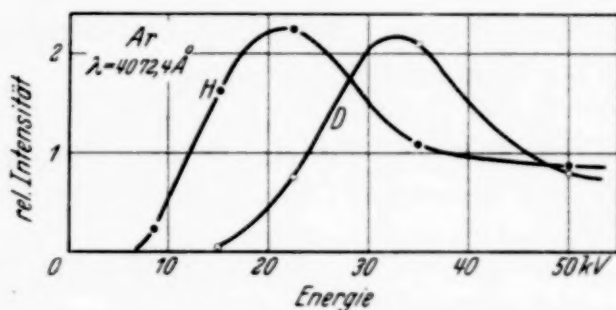


Fig. 15. Anregung der Argonfunkenlinie 4072,4 Å ($4p^4D_2 - 5s^4P_2$) als Funktion der Energie der H- bzw. D-Atome.

Um diese Anschauung zu prüfen, wurde H in Neon geschossen. Leider war aber das Leuchten, das bei Neon spektral ungünstig liegt, bei Spannungen von etwa 50 kV nicht meßbar. Da diese Versuche ohnedies aus dem Rahmen dieser Arbeit fielen, wurden sie abgebrochen, doch besteht die Absicht, sie bei anderer Gelegenheit wieder aufzunehmen.

E. Diskussion der Ergebnisse und Vergleich mit der Theorie.

Es ist schon mehrfach versucht worden, den Korpustularstoß theoretisch zu behandeln²⁾. Es ist aber noch nicht gelungen, eine allgemein gültige Theorie für den Stoß neutraler Atome aufzustellen, da entweder die innere Energie dabei vernachlässigt oder die Korpustel als geladen vorausgesetzt wurde (Ionenstoß).

Joos und Kulenkampff³⁾ unterscheiden zwei Fälle, kleine und große Geschwindigkeit der stoßenden Korpustel. Ihre einfache Theorie ist jedoch

¹⁾ Anmerkung bei der Korrektur. Z. Lutze hat kürzlich das gleiche gefunden. ZS. f. Phys. **105**, 445, 1937. — ²⁾ H. Kallmann u. Rosen, Phys. ZS. **32**, 521, 1931. — ³⁾ G. Joos u. H. Kulenkampff, ebenda **25**, 257, 1924.

mit den experimentellen Ergebnissen nur zum Teil in Einklang zu bringen. Deshalb stellte Döpel¹⁾ eine Arbeitshypothese auf, die eine Erweiterung obiger Theorie ist. Er berücksichtigt die beiderseitigen Bindungsenergien und kommt zu dem Ergebnis, daß der Stoßeffect von Korpuskel auf Korpuskel weder eine reine Funktion ihrer Geschwindigkeit noch ihrer kinetischen Energie allein ist. Die „übertragbare Energie“ besteht in dieser Arbeitshypothese aus der translatorischen Energie des Leuchtelektrons und einem Bruchteil k der kinetischen Energie des Atomrumpfes. Dieser Bruchteil ist abhängig von den Elektronenbindungsenergien und der Masse der beiden Partner. Nach Döpel ist folgende Energie von der Korpuskel 1 auf die Korpuskel 2 übertragbar:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{m v^2}{2} + k_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{M_1 \cdot v^2}{2},$$

wobei

$$k_{1 \rightarrow 2} = f(E_1, E_2, M_1, M_2)$$

ist, und zwar

$$k_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{für} \quad E_1 \ll E_2$$

bzw.

$$k_{1 \rightarrow 2} < \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad \text{für} \quad E_1 \geq E_2.$$

Dabei ist m die Masse des Leuchtelektrons des stoßenden Elektrons, M_1 die Masse des stoßenden Atoms, M_2 die Masse des gestoßenen Atoms, v die Relativgeschwindigkeit der beiden Stoßpartner, E_1 die Anregungs- bzw. Ionisationsenergie des stoßenden Atoms, E_2 die Anregungs- bzw. Ionisationsenergie des gestoßenen Atoms.

Je nachdem nun $E_1 \ll E_2$, oder $E_1 > E_2$ ist, geht die Funktion $W_{1 \rightarrow 2}$ in eine Geschwindigkeits- oder Energiefunktion über.

Vergleicht man nun zwei Atomstoßanregungsprozesse miteinander, etwa den Stoß von H auf He und Ar auf He, so ändern sich gleichzeitig zwei Größen, die Anregungsenergie E und die Masse M , wenn man von H-Stoß auf Ar-Stoß übergeht. Wenn man aber, wie es hier geschehen ist, den Stoß von leichten und schweren H-Teilchen mit He vergleicht, dann ändert man nur die Masse, die Anregungsenergie E von H und D ist ja die gleiche. Demnach kann man E_1 und E_2 konstant setzen und W wird jetzt nur noch eine Funktion von M_1 und M_2 . Wir wollen jetzt die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung an Hand der eben geschilderten Theorie besprechen.

¹⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. **16**, 1. 1933.

Der Vergleich der Anregungsfunktionen zeigt, daß die Anregung der He- und Ar-Linien durch H bei kleineren Spannungen und bei größeren Geschwindigkeiten erfolgt als durch D. Wir wollen zunächst unter diesem Gesichtspunkt die Anregungsfunktion der He-Linie 3888 Å besprechen. Die von Wasserstoff auf Helium übertragbare Energie wird nach der 1. Gleichung der voranstehenden Seite

$$W_{H \rightarrow He} = \frac{m_e v^2}{2} + k_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{4}{4+1} \cdot \frac{v^2}{2}$$

bzw.

$$W_{D \rightarrow He} = \frac{m_e v^2}{2 \cdot 2} + k_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{4}{4+2} \cdot \frac{2 v^2}{2 \cdot 2}.$$

Bei gleicher Energie der Korpuskeln ist $W_{H \rightarrow He} > W_{D \rightarrow He}$. Da in dem in Frage kommenden Bereich die Anregung mit W wächst, muß sie bei gleicher *Energie* bei H-Atomstoß *größer* sein als bei D-Atomstoß (vgl. die experimentellen Kurven in Fig. 3).

Dagegen ist bei gleicher Geschwindigkeit

$$W_{H \rightarrow He} = \frac{m_e v^2}{2} + k_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{4}{4+1} \cdot \frac{v^2}{2}$$

und

$$W_{D \rightarrow He} = \frac{m_e v^2}{2} + k_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{4}{4+2} \cdot \frac{2 v^2}{2},$$

d. h.

$$W_{H \rightarrow He} < W_{D \rightarrow He}.$$

Bei gleicher *Geschwindigkeit* muß die Anregung für Helium beim H-Atomstoß *kleiner* sein als beim D-Atomstoß (vgl. die experimentellen Kurven in Fig. 4).

Für die Anregung des Argons lassen sich die gleichen Überlegungen machen. Während dies bei He nur grob möglich war, weil nur der Anstieg der Anregungsfunktion experimentell zugänglich ist, lassen die bei Ar gemessenen Anregungsfunktionen mit den gut ausgeprägten Maxima einen besseren, sogar quantitativen Vergleich zu. Die Figuren zeigen folgenden Unterschied zwischen der Anregung durch H und D: Die Intensität als Funktion der Energie aufgetragen erreicht bei H-Stoß bei kleinerer Energie ein Maximum als bei D-Stoß. Dagegen erreicht als Funktion der Geschwindigkeit die Anregung von Ar durch H später ein Maximum als die durch D. Beide Maxima sind bei allen Figuren von gleicher Höhe, so daß wohl angenommen werden darf, da es sich ja immer um den gleichen gestoßenen Partner handelt, daß der übernommene Anteil der übertragbaren Energie auch gleich ist. Die Maxima gelangen aber nicht zur Deckung, sondern sind in Richtung der Abszisse verschoben.

Dies läßt sich sehr schön durch den Döpelschen Ansatz wiedergeben. Zunächst gelten die gleichen qualitativen Überlegungen, die oben im Falle des Stoßes $H \rightarrow He$ und $D \rightarrow He$ für den Anstieg der Anregungsfunktion gemacht worden war, auch für das Maximum der Anregungsfunktion bei dem Stoß $H \rightarrow Ar$ und $D \rightarrow Ar$.

Darüber hinaus läßt sich noch hier, wo das Maximum der Anregungsfunktion im zugänglichen Spannungsgebiet liegt, sogar eine quantitative

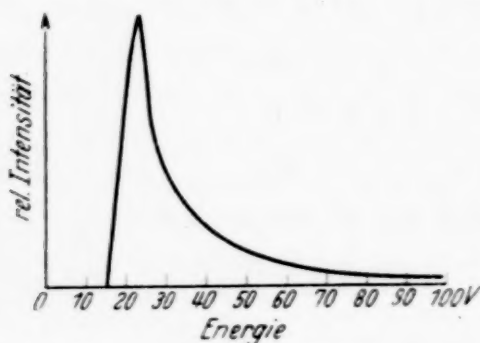


Fig. 16. Anregungsfunktion der Argonlinie 4259 Å durch Elektronenstoß, nach O. Fischer.

Auswertung des Döpelschen Ansatzes durch Berechnung des Faktors „ k “ ausführen.

Der Faktor k für den Anteil der auf den Atomrumpf übertragbaren Energie läßt sich berechnen, wenn man die Anregungsfunktionen bei Anregung durch Elektronenstoß und Atomstoß miteinander vergleicht. Dies läßt sich sowohl für Anregung durch H wie durch D ausführen.

Da die Elektronenhülle in beiden Fällen die gleiche ist, muß auch der Faktor k gleich herauskommen, wenn überhaupt der Ansatz brauchbar ist.

Die Anregungsfunktion für Elektronenstoß ist bei vielen Argonlinien von Fischer¹⁾ gemessen und für die Linie 4259 Å in Fig. 16 dargestellt. Wie man sieht, ist die Form der Anregungsfunktionen für Elektronen- und Atomstoß recht verschieden. Bei Atomstoßanregung ist sie überdies bei kleinen Geschwindigkeiten nicht gemessen. Man kann ihren Verlauf nur vermuten, und er ist sicher flacher als bei Elektronenstoßanregung. Man kann und darf also nicht die Anregung bei kleinen Geschwindigkeiten, insbesondere nicht die Einsatzspannungen, miteinander vergleichen. Man kann aber einen Versuch machen, ob sich nicht die Optimalspannungen (die Spannungen, bei denen die Anregungsfunktionen ein Maximum haben) vergleichen lassen.

Sei V_H die Optimalspannung bei Anregung durch H -Stoß, V_D die Optimalspannung bei Anregung durch D -Stoß.

Nach der Döpelschen Theorie ist die übertragbare Energie

$$E_{H \rightarrow Ar} = \frac{m_e}{2} v_H^2 + k \frac{40}{41} \cdot \frac{v_H^2}{2} m_H \approx e V_H \left(\frac{m_e}{m_H} + k \right)$$

und

$$E_{D \rightarrow Ar} = \frac{m_e}{2} v_D^2 + k \frac{40}{42} \cdot \frac{v_D^2}{2} m_D \approx e V_D \left(\frac{m_e}{m_H} + k \right).$$

¹⁾ O. Fischer, ZS. f. Phys. **86**, 650, 1933.

Aus den Figuren ergibt sich für die Optimalspannung bei Elektronenstoßanregung $E = 22$ e-Volt, für die Optimalspannung bei H-Stoß 19000 Volt und für die Optimalspannung bei D-Stoß 29000 Volt. Daraus berechnet sich

$$k = \frac{E}{e V_H} - \frac{m_e}{m_H} = \frac{22}{19000} - \frac{1}{1800} = 0,6 \cdot 10^{-3}$$

für den Stoß H auf Ar und

$$k = \frac{E}{e V_D} - \frac{m_e}{m_D} = \frac{22}{29000} - \frac{1}{3600} = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

für den Stoß D auf Ar. Die Differenz liegt innerhalb der Fehlergrenze.

Man sieht also, daß sich die Arbeitshypothese von Döpel hier sogar quantitativ bewährt. Selbstverständlich gilt dies nur für die Optimalspannung. Die Einsatzspannung mag ganz anderen Gesetzmäßigkeiten folgen.

F. Anregung des H und D durch Helium.

Außer der Anregung der Heliumlinie 3888 Å wurde auch das bewegte Leuchten des Wasserstoffs, angeregt durch Stoß mit dem ruhenden He-Teilchen, an der Linie H_γ untersucht, entsprechend natürlich auch das des Deuteriums an der Linie D_γ (Fig. 17 und 18).

Beide Male wird wieder die Intensität als Funktion der Energie und der Geschwindigkeit aufgetragen. Im Gegensatz zu oben ist beim bewegten

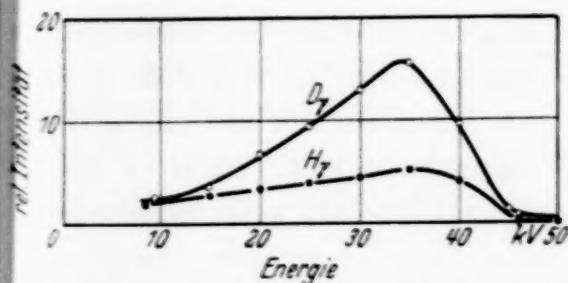


Fig. 17. Anregung der H- bzw. D-Atome beim Stoß mit He-Atomen als Funktion der kinetischen Energie der H- bzw. D-Atome.

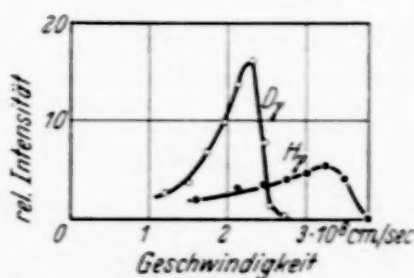


Fig. 18. Anregung der H- bzw. D-Atome beim Stoß mit He-Atomen als Funktion der Geschwindigkeit der H- bzw. D-Atome.

Leuchten die Anregung des Deuteriums durch Helium sowohl bei gleicher Energie als auch bei gleicher Geschwindigkeit größer als die des Wasserstoffs. Dementsprechend liegt auch das jeweils erreichte Maximum bei kleinerer Energie und kleinerer Geschwindigkeit. Dabei ist bei gleicher Energie der Fall $W_{\text{He} \rightarrow \text{D}} > W_{\text{He} \rightarrow \text{H}}$ nicht in Einklang mit der oben geschilderten theoretischen Vorstellung zu bringen. Dagegen ist bei gleicher Geschwindigkeit $W_{\text{He} \rightarrow \text{D}} > W_{\text{He} \rightarrow \text{H}}$, was mit den vorausgegangenen Überlegungen verträglich ist.

G. Störung des Abklingleuchtens von H- und D-Kanalstrahlen.

Bei der Anregung des He durch H-Stoß und D-Stoß konnte wegen der geringen zur Verfügung stehenden Spannung kein Maximum der Anregung erreicht werden. Dagegen hatte die Anregung des H und D durch Helium im bewegten Leuchten beide Male ein Maximum. Diese hatten aber einen wesentlichen Größenunterschied, und zwar liegt, wie aus Fig. 18 zu sehen

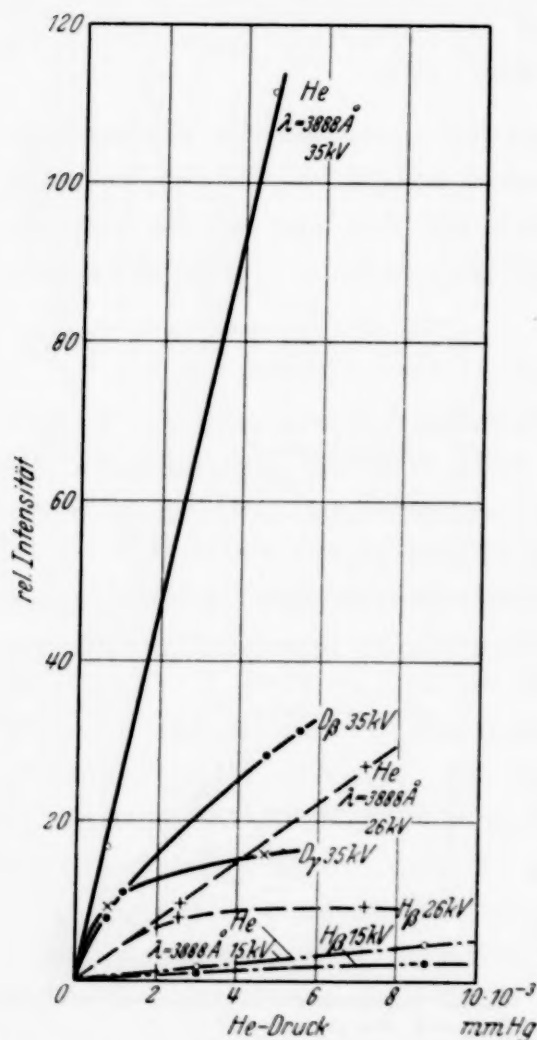


Fig. 19. Abhängigkeit der Intensität der H-, D- und He-Linien vom He-Druck.

ist also eine Funktion der Geschwindigkeit. Daraus kann man sich z. T. wenigstens die geringe Höhe des H-Maximums erklären, das bei höherer Geschwindigkeit liegt, also auch stärker gestört sein wird.

Um diese Vermutung zu prüfen, wurde bei drei verschiedenen Geschwindigkeiten der He-Druck im Beobachtungsraum verändert, und dabei die Intensitätsänderung des He- und H-(D-)Leuchtens photographisch gemessen. Es zeigte sich, daß das H-(D-)Abklingleuchten nicht linear dem

ist, das Maximum des Deuteriums höher als das des Wasserstoffs. Da die oben besprochene Arbeitshypothese keine Erklärung dafür gibt, wurde nach dem Grund gesucht. Es ist zu vermuten, daß das Abklingleuchten des Wasserstoffs und Deuteriums nicht ohne Störung verläuft. Denn bei einer Geschwindigkeit von $2,5 \cdot 10^8$ cm pro sec und einer freien Weglänge von 11,7 cm bei einem He-Druck von $3,5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg macht das H-(D-)Teilchen $2,14 \cdot 10^7$ Stöße pro Sekunde. Während der Verweilzeit des H (D) von $1,8 \cdot 10^{-8}$ sec fliegt es bei dieser Geschwindigkeit rund 4,5 cm weit und stößt dabei im Mittel 0,4 mal mit einem He-Atom zusammen, wobei es seine Energie abgeben kann, ohne selbst das zu erwartende Leuchten emittiert zu haben. Mit größerer Geschwindigkeit nimmt die Anzahl der Stöße zu, damit aber auch die Zahl der Störungsstöße. Diese

Druck anstieg, während das He-Leuchten druckproportional war (Fig. 19). Allerdings müßte die vom H (D) abgegebene, nicht in Abklingleuchten verwandelte Energie die Intensität des He erhöhen. Das ist wohl auch der Fall, nur kommt dies bei der an und für sich schon hohen Intensität des He-Leuchtens nicht zur Geltung. Tatsächlich liegen bei allen drei Geschwindigkeiten die He-Meßpunkte des niedrigeren Druckes ein wenig unter der angenommenen linearen Kurve, die des höheren Druckes darüber.

Mit Hilfe einer von Stern und Volmer¹⁾ angegebenen Formel wurde auf Grund des nicht linearen Anstieges des Abklingleuchtens bei H (D) eine Korrektur an der Anregungsfunktion von H (D) durch He angebracht. Sei I_0 die ungestörte und I die Intensität des Lichtes bei Druck p , dann gilt

$$I = I_0 \frac{1}{1 + bp}.$$

Dabei ist b eine Konstante. Aus zwei Meßpunkten $I_1(p_1)$, $I_2(p_2)$ kann man b berechnen und alle gemessenen Intensitäten I der Anregungsfunktion damit zu I_0 korrigieren. Fig. 20 zeigt, daß dabei der Unterschied der beiden Maxima kleiner wird.

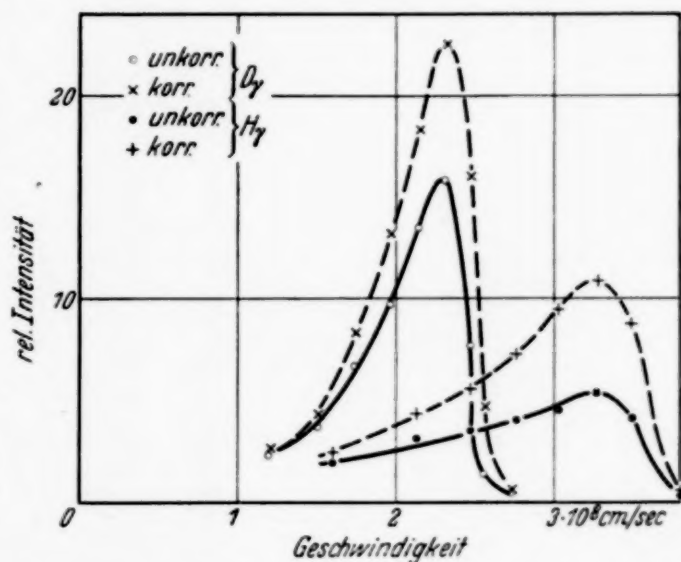


Fig. 20. Anregung der H- bzw. D-Atome beim Stoß mit He-Atomen mit Berücksichtigung der Auslöschung.

Fig. 20 zeigt, daß dabei der Unterschied der beiden Maxima kleiner wird.

H. Berechnung des Auslöschungsquerschnittes.

Aus der Fig. 19 des bewegten Leuchtens als Funktion des Druckes läßt sich der Auslöschungsquerschnitt auch absolut bestimmen. Wir knüpfen an eine Überlegung von Stern und Volmer¹⁾ an und betrachten eine Anzahl Atome N , die durch eine Energie angeregt werden. Es wird sich bald ein stationärer Zustand so einstellen, daß die Zahl der Atome/sec, die ihre Energie durch Emission verlieren, gleich der Anzahl ist, die durch Aufnahme von Energie in den angeregten Zustand gelangen. Dabei sei angenommen, daß der Gasdruck so gering ist, daß sich die Wirkung gegenseitiger Zusammenstöße nicht bemerkbar macht. Die Zahl der angeregten Atome sei n_0 .

Dann ist:

$$N \cdot k_a = n_0 \cdot k_e.$$

¹⁾ O. Stern u. M. Volmer, Phys. ZS. **20**, 183, 1919.

wobei $N \cdot k_a$ die Zahl der pro Sekunde angeregten Atome und $n_0 \cdot k_e$ die Zahl der pro Sekunde durch Emission in den Grundzustand gelangten Atome sei.

Erhöht man jetzt den Druck und damit die Anzahl der Atome, so daß nicht nur durch Emission, sondern auch durch Zusammenstöße Atome in den Grundzustand gelangen, so wird sich der folgende Zustand einstellen:

$$N \cdot k_a = n \cdot k_e + n \cdot k_z = n (k_e + k_z),$$

worin n die Zahl der angeregten Atome im Gleichgewicht ist. Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$\frac{n}{n_0} = \frac{k_e}{k_e + k_z}.$$

Ist E_0 die Intensität, die emittiert wird, wenn keine Vernichtung durch Zusammenstöße einträte, und E diejenige, bei der ein Teil durch Zusammenstöße verlorengegangen ist, so ist:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{E}{E_0} = \frac{k_e}{k_e + k_z}.$$

Nun ist $k_e = 1/\tau$, wobei τ die Abklingzeit ist, und $k_z = 1/T$, wobei T die Zeit zwischen zwei vernichtenden Zusammenstößen ist, also ist $1/T = v/\lambda$ (v = Geschwindigkeit, λ = freie Weglänge). Daraus folgt weiter:

$$E = E_0 \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T}}.$$

Die Zahl der Anregungsakte ist proportional dem Heliumdruck p , also das bewegte Leuchten:

$$I \sim \frac{p}{1 + \frac{\tau}{T}}.$$

Es wird also

$$I = I_0 \frac{p}{1 + \frac{\tau v}{\lambda_{\text{ausl}}}}.$$

Für λ_{ausl} gilt die Beziehung

$$\lambda_{\text{ausl}} = \frac{760}{\pi \cdot N \cdot d^2 \cdot p},$$

wobei $\pi \cdot \frac{d^2}{4}$ der gesuchte Auslöschungsquerschnitt ist. Aus je zwei Meßpunkten des Intensitätsverlaufes der D_γ , D_β , H_β (Fig. 19) kann man mit Hilfe der angegebenen Beziehung d^2 berechnen. Es folgt:

$$d_{\text{ausl}}^2 = \frac{b - c}{a \cdot v (c p_2 - b p_1)},$$

wobei bedeutet:

$$a = \frac{\tau \pi \cdot N}{760}, \quad b = \frac{p_2}{p_1}, \quad c = \frac{I_2}{I_1},$$

p_1 , I_1 und p_2 , I_2 sind die Koordinaten der Meßpunkte.

Für die D_γ ergeben sich bei einer Spannung von 35 kV folgende Werte:

$$v = 1,460 \cdot 10^8 \text{ cm/sec.}$$

$$a = 2,029 \cdot 10^9;$$

aus Fig. 19 entnimmt man für

$$p_1 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg.}$$

und

$$p_2 = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg.}$$

$$b = 5,875$$

und

$$I_1 = 8, \quad I_2 = 16, \quad \text{also} \quad c = 2.$$

Es berechnet sich daraus ein Auslöschungsquerschnitt

$$\frac{\pi}{4} d^2 = 2,1 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2.$$

Der Radius des He-Atoms beträgt $0,95 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ und als Radius des Wasserstoffatoms wurde der Radius der ersten Bohrschen Bahn angesetzt, daraus ergibt sich der gaskinetische Querschnitt zu

$$\pi \cdot r^2 = 1,7 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2.$$

Das Verhältnis ist 12,26. Der Auslöschungsquerschnitt für die dritte Bohrsche Bahn des H-Atoms bei einem Stoß mit einem He-Atom beträgt also das 12fache des gaskinetischen Querschnittes.

I. Stoß von H und D auf H_2 .

Im Anschluß an die Anregung von H und D durch Helium erhob sich die Frage, ob der Verlauf ein ähnlicher sei, wenn man als Stoßteilchen D und H und als gestoßene Teilchen H_2 und D_2 wählt. Gleichzeitig durfte man erwarten, daß der Stoßpartner angeregt wird, und man so das bewegte Leuchten, angeregt durch H_2 und D_2 , untersuchen konnte.

Zu diesem Zweck mußte an der Apparatur der Kapillarwiderstand, durch den bei den oben geschilderten Versuchen das Helium in den Beobachtungsraum gelangte, vergrößert werden. Dies geschah unter Anwendung eines Schraubenventils, das zwischen Vorratsgefäß und Kapillarwiderstand angebracht wurde. Das einströmende H_2 und D_2 mußte die sehr genau geschnittenen Gewindegänge passieren, wobei durch Drehen einfach der Weg verlängert werden konnte. Als Spektrograph wurde der Zeiss-Dreiprismenspektrograph verwandt, der eine Kamera mit dem Öffnungsverhältnis 1 : 4,5 besaß. Es stand noch eine Kamera mit dem Öffnungsverhältnis 1 : 18 zur Verfügung, mit der eine Auflösung im besagten Gebiet von etwa 10 \AA erreicht werden konnte, doch wäre dazu die Belichtungszeit

um ein Vielfaches zu steigern gewesen, wofür nicht in genügendem Maße Deuterium vorhanden war. Deshalb wurde dieser Weg nicht weiter verfolgt.

Für das Ergebnis lagen folgende Möglichkeiten vor:

1. Der molekulare Wasserstoff (Deuterium) wird angeregt und nicht dissoziiert, es erscheinen Banden. Daneben wird Deuterium (Wasserstoff) bewegt angeregt (Balmer-Serie $D(H)_{\beta, \gamma, \delta}$).

2. Der Wasserstoff (Deuterium) wird außerdem dissoziiert, es erscheinen auch die Wasserstoff- (Deuterium)- Linien.

Das Ergebnis zeigte, daß der zweite Fall vorlag. Es erschienen die beiden Balmer-Serien und nach längerer Belichtungszeit auch die Banden. Die jeweils zusammengehörigen Wasserstoff- und Deuteriumlinien liegen ungefähr $1,7 \text{ \AA}$ auseinander. Der verwandte Spektrograph besaß aber in dem Spektralgebiet der H_{γ} und D_{γ} nur eine Dispersion von 40 \AA/mm ; es war deshalb unmöglich, die auf der Platte sichtbare Schwärzung mit dem Photometer als zwei Linien zu identifizieren. Daß tatsächlich zwei Linien vorhanden sein mußten, wurde nachgewiesen, indem mit der speziellen Spaltblende des Spektrographen über und unter das eigentliche Spektrum ein $H \rightarrow H_2$ -Kanalstrahl aufgenommen wurde und dann in die Mitte das $D \rightarrow H_2$ -Spektrum gedruckt wurde. Die Linien des mittleren Spektrums waren, deutlich sichtbar, doppelt so breit als die des Vergleichsspektrums.

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1936 und 1937 im Physikalischen Institut der Friedrich-Schiller-Universität Jena ausgeführt. Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Hanle, bin ich zu stetem Danke verpflichtet für die Anregung zu dieser Arbeit und für die mir zuteil gewordene Förderung; ferner danke ich Herrn Dr. R. Döpel für wertvolle Ratschläge und Diskussionen. Herrn Geheimrat Prof. Dr. M. Wien und Herrn Prof. Dr. H. Kulenkampff danke ich für die Überlassung von Institutsmitteln, der Linde A. G. für Edelgase, sowie der Notgemeinschaft und der Helmholtz-Gesellschaft für die Herrn Prof. Dr. W. Hanle zur Verfügung gestellten Apparate.

Versuch zu einer Theorie über die Entstehung der kosmischen Strahlung. II.

Von Hannes Alfvén.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 4. September 1937.)

Es wird die „Doppelsterntheorie“ der kosmischen Strahlung näher diskutiert. Wenn man die Annahme macht, daß es ein schwaches Magnetfeld ($\sim 10^{-11}$ Gauß) im interstellaren Raum innerhalb des galaktischen Systems gibt, lassen sich die wichtigsten Eigenschaften (Teilchenenergie, Intensität, isotrope Verteilung usw.) der kosmischen Strahlung nach klassischen elektrodynamischen Gesetzen erklären.

In einer früheren Arbeit¹⁾ ist gezeigt worden, daß bei der Rotation eines Doppelsterns ein zyklotronartiger Prozeß entstehen muß, wodurch geladene Teilchen bis zu Energien von der Größenordnung 10^{10} bis 10^{11} eV beschleunigt werden, und es wurde die Vermutung ausgesprochen, daß die kosmische Strahlung in dieser Weise entsteht. Die Schwierigkeiten dieser Theorie sind aber augenfällig. Erstens ist der Beschleunigungsprozeß ziemlich kompliziert und setzt voraus, daß sich schon eine große Menge ziemlich energiereicher Teilchen in bestimmten Gebieten in der Umgebung des Doppelsterns befinden. Ferner scheint die weitgehende Unabhängigkeit der kosmischen Strahlung von der Sternzeit mit der Annahme ihrer Entstehung an den Doppelsternen unvereinbar zu sein. Auch die Leistung der Doppelsterngeneratoren scheint ungenügend zu sein.

Der Zweck dieser Arbeit ist zu zeigen, wie die erwähnten Schwierigkeiten sich überwinden lassen. In Abschnitt I werden einige Prozesse diskutiert, die sich auch bei der Rotation der Doppelsterne abspielen müssen, aber viel einfacher als der „kosmische Zyklotronprozeß“ sind. In Abschnitt II wird ferner gezeigt, daß die aus mehreren Gründen wahrscheinliche Annahme eines interstellaren Magnetfeldes sowohl die isotrope Verteilung als auch die gemessene Intensität der kosmischen Strahlung in Einklang mit der Doppelsterntheorie bringt.

I. Struktur und Leistung der Doppelsterngeneratoren.

Wenn sich zwei Magnetfelder relativ zueinander bewegen, entsteht im allgemeinen — nach den klassischen elektrodynamischen Gesetzen — eine elektromotorische Kraft, die geladene Teilchen (z. B. Elektronen, Protonen) beschleunigen kann. In einer früheren Arbeit²⁾ wurde gezeigt,

¹⁾ ZS. f. Phys. **105**, 319, 1937. — ²⁾ Ebenda **105**, 633, 1937.

daß ein derartiger Prozeß an der Sonne entstehen muß durch das Zusammenwirken des allgemeinen Magnetfeldes der Sonne mit dem Magnetfeld eines Sonnenflecks. Die Energie der durch diesen Prozeß beschleunigten Teilchen berechnet sich zu einigen hundert Millionen eV. Nun zeigt das Nordlicht, daß die Sonne tatsächlich eine Strahlung von dieser Energie aussendet, denn der Polabstand der Nordlichtzone entspricht nach der Störmerschen Theorie gerade dieser Energie. Es gibt also gewissermaßen eine experimentelle Bestätigung für Prozesse dieser Art.

Die Voraussetzung für den „Nordlichtteilchenprozeß“ an der Sonne ist das Vorhandensein von zwei einander nicht parallelen magnetischen Dipolen (wovon der eine von dem allgemeinen Magnetfeld der Sonne, der andere von dem des Sonnenfleckens herrührt), und einer relativen Bewegung (die durch die Ungleichheit der Rotationsgeschwindigkeit in verschiedenen Breiten entsteht). Nun ist es natürlich nicht notwendig, daß das eine Magnetfeld das eines Sonnenflecks ist, sondern es kann auch von dem magnetischen Dipolmoment eines benachbarten Himmelskörpers herrühren. Man kann also z. B. erwarten, daß das Zusammenwirken der Magnetfelder der Sonne und der Erde einen ähnlichen Prozeß geben wird. Eine Rechnung zeigt aber, daß das Dipolmoment der Erde viel zu klein und der Abstand zwischen den beiden Himmelskörpern zu groß ist, um den beschleunigten Teilchen eine beträchtliche Energie zu erteilen. Dasselbe gilt sehr wahrscheinlich auch von den anderen Planeten.

Obwohl also in unserem Sonnensystem Prozesse dieser Art keine Bedeutung haben, können sie wahrscheinlich an den Doppelsternen — insbesondere den engen Doppelsternen — sehr große Energien erzeugen. Zwar wissen wir überhaupt nichts von den magnetischen Verhältnissen an den Doppelsternen, aber wir können wohl annehmen, daß die beiden Komponenten eines Doppelsterns genau so wie die Sonne und die Erde magnetische Dipole sind, die gewöhnlich nicht genau parallel sind. Damit die erwähnten Prozesse stattfinden, muß es auch eine Relativbewegung geben, d. h. das ganze System darf nicht wie ein starrer Körper rotieren. Auch diese Voraussetzung ist wahrscheinlich erfüllt; denn da die innere Reibung z. B. nicht die Ungleichheit in der Rotationsgeschwindigkeit der verschiedenen Breiten an der Sonne hat ausgleichen können, dürfte sie auch nicht die Rotationsgeschwindigkeit der Doppelsternkomponente der Rotationsgeschwindigkeit des ganzen Systems angeglichen haben.

Die Voraussetzung für Prozesse derselben Art wie der Nordlichtteilchenprozeß ist also sehr wahrscheinlich an den Doppelsternen vorhanden. Um die Prozesse zu veranschaulichen und gleichzeitig die Größenordnung der

beschleunigten Teilchen zu berechnen, wollen wir jetzt unter vereinfachten Annahmen ein Beispiel durchrechnen.

Die elektromotorische Kraft. Wir nehmen an, daß die beiden Komponenten des betrachteten Doppelsterns Dipolmomente haben, die einander gleich sind. Die beiden Komponenten kreisen mit konstanter Geschwindigkeit um die Symmetrielinie $x'Ox$ (vgl. Fig. 1) und in der konstanten gegenseitigen Entfernung R_0 . Ferner nehmen wir an, daß beide Dipole denselben Winkel φ mit der Symmetrielinie bilden, und zwar so, daß sie in entgegengesetzten Richtungen gedreht sind. Die Richtungen der Dipole seien raumfest¹⁾, und in einem bestimmten Augenblick liegen also die beiden Dipole in derselben Ebene (wie in Fig. 1, wo sie in der Zeichenebene liegen).

In der Umgebung des Doppelsterns können sich jetzt geladene Teilchen hauptsächlich nur in der Weise bewegen, daß sie den magnetischen Kraftlinien folgen²⁾. Zwar kommen auch Präzessionsbewegungen vor, aber sie sind viel langsamer als die Bewegungen längs der Kraftlinien und können in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden. In

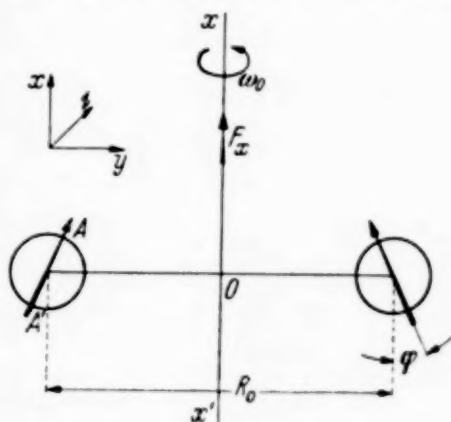


Fig. 1.

Fig. 1 können sich also geladene Teilchen z. B. auf der Symmetrielinie frei bewegen, da sie dabei keine Kraftlinien schneiden. Aber infolge der Induktion durch die sich bewegenden Dipole herrscht längs der Symmetrielinie eine elektrische Feldstärke, die alle sich dort befindenden geladenen Teilchen beschleunigt.

Die Größe dieser Feldstärke F_x läßt sich leicht berechnen. Das magnetische Feld von dem einen Dipol bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2} R_0 \omega_0$ längs der z -Achse, und gibt deshalb nach bekannten Gesetzen eine elektrische Feldstärke, deren x -Komponente gleich $\frac{R_0 \omega_0}{2c} H'_y$ ist, wobei c die Lichtgeschwindigkeit und H'_y die y -Komponente des von dem einen Dipol herrührenden Feldes bedeutet. Da der andere Dipol dieselbe elektrische Feldstärke hat (mit derselben Richtung!), wird die Gesamtfeldstärke

$$F_x = \frac{R_0 \omega_0}{c} H'_y.$$

¹⁾ Wenn dies nicht zutrifft, soll ω_0 in den folgenden Formeln den Unterschied in der Rotationsgeschwindigkeit bedeuten. — ²⁾ Vgl. ZS. f. Phys. **105**, 633, 1937.

Nun ist

$$H_y = \frac{a}{r^5} \left[\left(\frac{R_0^2}{2} - x^2 \right) \sin \varphi + \frac{3}{2} R_0 x \cos \varphi \right],$$

wo a das Moment des Dipols und $r = \sqrt{(\frac{1}{2} R_0)^2 + x^2}$ ist.

Wir können nun die Energie (in eV) berechnen, die einfach geladene Teilchen erhalten, wenn sie sich längs der Symmetrieachse vom negativen zum positiven Unendlichen bewegen. Wir finden

$$V_{\text{volt}} = 300 \int_{-\infty}^{+\infty} F_x dx = 8 \cdot 10^{-8} \frac{a \omega_0}{R_0} \sin \varphi. \quad (1)$$

V kann als die elektromotorische Kraft des „Doppelsterngenerators“ betrachtet werden, die positive Teilchen in die eine und negative Teilchen in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt. Man sieht leicht ein, daß nach einer halben Umdrehung des Doppelsterns die EMK. die entgegengesetzte Richtung hat. Der Generator liefert eine sinusförmige Wechselspannung mit der Amplitude V . Die gleiche Spannung würde in einem Leiter induziert, der auf der Symmetrielinie liegt und sich in großem Abstand zu einer Schleife schließt.

Die Energie der beschleunigten Teilchen ist von derselben Größenordnung wie die des in der vorigen Arbeit erwähnten „Zyklotronprozesses“. Wir führen dieselben Bezeichnungen wie dort (ZS. f. Phys. **105**, S. 331) ein, beachten jedoch, daß der wahrscheinlichste Wert für das Dipolmoment der Sonne nach Janossy¹⁾ und Vallarta²⁾ gleich 10^{34} e. m. E. ist, und bekommen

$$V_{\text{volt}} = 8,3 \cdot 10^{11} \frac{m}{DT} \sin \varphi. \quad (2)$$

Die Spannung des Generators beträgt 10^{11} Volt, wenn z. B. $T = 2$ Tage, $D = 10$ Sonnenradien, $m = 14$ Dipolmomente unserer Sonne und $\varphi = 10^0$ ist, was ohne Zweifel unter den Doppelsternen möglich ist. Sogar 10^{12} Volt dürfte bei engen Doppelsternen mit sehr großen Dipolmomenten vielleicht erreichbar sein.

Der Beschleunigungsprozeß findet nicht nur längs der Symmetrieachse statt, sondern auch in anderen Gebieten in der Umgebung des Doppelsterns. Unter anderem werden geladene Teilchen direkt von der Oberfläche der einen Komponente durch Induktion von dem anderen Dipol in den Welt- raum hinausgeschleudert. Dies findet besonders in der Umgebung der

¹⁾ L. Janossy, ZS. f. Phys. **104**, 430, 1937. — ²⁾ M. S. Vallarta, Nature **139**, 839, 1937.

Punkte (A, A' usw. in Fig. 1) statt, wo Kraftlinien von der Oberfläche bis ins Unendliche gehend beginnen.

Wenn wir die vereinfachten Annahmen (betreffs der Gleichheit der Dipolmomente, der Winkeln φ usw.) fallen lassen, werden die Rechnungen viel komplizierter. Die Prozesse müssen jedoch in ungefähr derselben Weise stattfinden, und wir können auch Energien von derselben Größenordnung erwarten. Es kann also behauptet werden, daß *jeder Doppelstern eine Strahlung von sehr schnellen geladenen Teilchen erzeugen muß. Ihre Energie hängt von den Eigenschaften des Doppelsterns ab und beträgt oft 10^{10} bis 10^{11} oder sogar 10^{12} eV.* — Da ein großer Teil der Strahlung die Sterne selbst trifft, müssen Sekundärprozesse entstehen, wodurch auch γ -Strahlung von etwa derselben Energie emittiert wird.

Die Leistung. Es ist nun sehr interessant — aber auch sehr schwierig — zu schätzen, welche Größe die Leistung der Doppelsterngeneratoren hat. Dies wird uns einerseits zeigen, ob die Leistung groß genug ist, um die ganze auf der Erde gemessene Intensität der kosmischen Strahlung in dieser Weise zu erklären, und andererseits, ob sie genügend klein ist, so daß wirklich die gegenseitige Gravitationsenergie der Doppelsternkomponenten diesen Prozeß lang genug unterhalten kann. Denn da die Ströme der Doppelsterngeneratoren die Bewegung der Komponenten bremsen, werden diese sich einander nähern, so daß letzten Endes die Gravitationsenergie der Doppelsterne die Energie der kosmischen Strahlung liefert. — Obwohl die folgenden Rechnungen natürlich nur angenähert gelten und um eine Zehnerpotenz falsch sein können, dürften sie doch diese Verhältnisse einigermaßen klarlegen.

Es ist natürlich sehr schwer, die Größe des Raumes zu berechnen, in dem die Entladung stattfindet. Wir dürften jedoch die ungefähr richtige Größenordnung finden, wenn wir annehmen, daß der Entladungsraum zwischen den Komponenten des Doppelsterns mit einem Zylinder vom Radius $0,1 R_0$ um die Symmetrieachse äquivalent ist. In unserem Beispiel, wo $R_0 = 10 R_\odot$ (Sonnenradien) war, ist also der Stromquerschnitt $1,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^2$, so daß, auch wenn die Stromstärke 10^{13} Amp. beträgt, die Stromdichte nur $0,7 \cdot 10^{-9} \text{ Amp./cm}^2$ ist. Wenn der Strom aus einfach geladenen Teilchen besteht, die sich beinahe mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, bedeutet dies, daß wir 0,14 Teilchen pro cm^3 haben. Dies ist sicherlich viel kleiner als die gewöhnliche Dichte der Materie in der Umgebung der Sterne, so daß aus Mangel an geladenen Teilchen die Stromstärke wenigstens nicht bei 10^{13} Amp. begrenzt werden kann. — Da die Entladung negative Teilchen in die eine Richtung und positive Teilchen in die andere Richtung führt, dürften keine

wesentlich strombegrenzenden Raumladungen entstehen. — Es scheint deshalb am wahrscheinlichsten, daß die Stromstärke solange wächst, bis das Magnetfeld des Stromes das stromerzeugende Magnetfeld beträchtlich stört. Eine Stromstärke von J Amp. gibt am Rande des betrachteten Zylinders eine Feldstärke $H = 0,2 \frac{J}{0,1 R_0}$, die kleiner oder höchstens etwa gleich $a/(\frac{1}{2} R_0)^3$ sein muß. Dies gibt uns eine maximale Stromstärke von etwa

$$J = \frac{4a}{R_0^2} \text{ Amp.} \quad (3)$$

In unserem Beispiel war $a = 1,4 \cdot 10^{35}$ Gauß cm^3 und $R_0 = 7 \cdot 10^{11}$ cm, was uns $J = 10^{12}$ Amp. gibt.

Die Leistung unseres Wechselstromgenerators beträgt also nach (1) und (3) $W = 10^7 \cdot \frac{1}{2} VJ = 1,6 \frac{a^2 \omega_0}{R_0^3} \sin \varphi \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$, die der Gravitationsenergie entnommen werden muß, so daß die beiden Komponenten sich nähern müssen. In der Umlaufszeit T werde ihr Abstand um ΔR_0 verkleinert, wodurch die Energie $WT = \frac{1}{2} k^2 \frac{M^2}{R_0^3} \Delta R_0$ ($k^2 = \text{Gravitationskonstante}$, $M = \text{Masse der Komponente}$) in kosmische Strahlungsenergie umgesetzt wird. Wenn a/M denselben Wert wie bei der Sonne hat ($a/M = 5 \text{ Gauß cm}^3 \text{ g}^{-1}$), so wird

$$\Delta R_0 = \frac{2 T R_0^2}{k^2 M^2} W = \frac{6,4 \pi}{k^2} \frac{a^2}{M^2} \frac{\sin \varphi}{R_0} = 0,75 \cdot 10^{10} \frac{\sin \varphi}{R_0}.$$

In unserem Beispiel wird also $\Delta R_0 = 0,0019$ cm pro Umlauf oder 0,34 cm pro Jahr. In 10^{10} Jahren braucht also der Abstand zwischen den Komponenten des Doppelsterns nur um 0,5% abzunehmen, um die berechnete Leistung des Generators zu ermöglichen. Da wir mit einem engen Dipolstern gerechnet haben, der eine verhältnismäßig große Leistung hat, können wir allgemein sagen, daß die beschriebenen Prozesse aus energetischen Gründen durchaus möglich sind.

II. Vergleich zwischen der Theorie und den experimentellen Tatsachen.

Wir haben gesehen, daß bei der Rotation eines Doppelsterns im allgemeinen eine Strahlung entstehen muß, deren Teilchenenergie von derselben Größenordnung wie die der kosmischen Strahlung ist. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß die kosmische Strahlung in dieser Weise entsteht.

Wir wollen nun untersuchen, ob dies auch aus anderen Gesichtspunkten möglich ist. Drei Schwierigkeiten zeigen sich sofort:

1. Die Doppelsterne liegen wie alle Sterne überwiegend in Richtung der Milchstraße. Die weitgehende Unabhängigkeit der kosmischen Strahlung von der Sternzeit zeigt aber, daß diese uns ziemlich gleichmäßig aus allen Richtungen erreicht.

2. Da bei dem Erzeugungsprozeß schnelle geladene Teilchen die Doppelsterne treffen und dort γ -Strahlung erzeugen müssen, ist zu erwarten, daß die kosmische Strahlung auch viele neutrale Teilchen enthält. Nach den experimentellen Ergebnissen sind aber fast nur geladene Teilchen vorhanden.

3. Die Leistung der Doppelsterngeneratoren scheint viel zu klein zu sein, um die experimentell gemessene Intensität zu geben. Der Generator in unserem Beispiel gibt nur $5 \cdot 10^{29}$ erg/sec, während nach ZS. f. Phys. 105, S. 333 viel mehr als 10^{34} erg/sec nötig ist. Da dieser Generator aber eine verhältnismäßig große Leistung hat, dürfte die Energie etwa 5 bis 7 Zehnerpotenzen zu klein sein.

Es ist jedoch zu bemerken, daß *alle diese Schwierigkeiten nur unter der Voraussetzung entstehen, daß geladene Teilchen sich im Weltraum geradlinig wie das Licht bewegen*, wie ja gewöhnlich angenommen wird. Wenn es aber *im interstellaren Raum ein Magnetfeld gibt*, dessen mittlere Stärke z. B. auch nur 10^{-11} Gauß¹⁾ beträgt, so wird ein Teilchen von 10^{10} eV eine Bahn mit dem Krümmungsradius von drei Lichtjahren beschreiben, was ja kosmisch sehr klein ist. Eine Feldstärke von dieser Größenordnung kann aber nicht durch die Dipolmomente der Sterne verursacht sein, denn z. B. das Magnetfeld der Sonne ist schon in der Entfernung 10^{15} cm = 0,001 Lichtjahr zu 10^{-11} Gauß gesunken. Die Magnetfelder können aber in anderer Weise erzeugt werden. Es ist z. B. durchaus möglich, daß sie durch die gewaltigen Ströme erzeugt werden, die die Doppelsterngeneratoren weit in den Weltraum hinaussenden, oder durch die elektromagnetischen Wellen, die diese Wechselströme erzeugen. (Dies bedeutet also eigentlich nur, daß die geladenen Teilchen einander gegenseitig beeinflussen.) — Ferner ist es ziemlich naheliegend, anzunehmen, daß unser galaktisches System, das ja einen gewaltigen rotierenden Körper darstellt, ein allgemeines Magnetfeld hat, genau so wie die einzelnen Himmelskörper. — Mehrere Argumente für die Existenz interstellarer Magnetfelder sind in einer früheren Arbeit²⁾ gegeben.

¹⁾ Auch wenn die Feldstärke nur 10^{-13} Gauß ist, sind die folgenden Überlegungen gültig. — ²⁾ Ark. f. mat. astr. fys. 25, B 29, 1937.

Wie gestalten sich nun die drei erwähnten Schwierigkeiten bei der Annahme, daß es interstellare Magnetfelder gibt? Die erste Schwierigkeit fällt sofort weg, denn durch die krummlinige Bewegung in den Magnetfeldern müssen ja die geladenen Teilchen so gestreut werden, daß sie etwa gleichmäßig aus allen Richtungen kommen¹⁾. — Ferner muß die Intensität der geladenen Teilchen — aber nicht die der ungeladenen Teilchen! — sehr viel vergrößert werden, weil jene im Magnetfeld geschlossene (oder besser beinahe geschlossene) Kurven beschreiben. Dies erklärt, daß fast nur geladene Teilchen die Erde als kosmische Strahlung treffen. Auch die zweite Schwierigkeit läßt sich also überwinden.

Die dritte Schwierigkeit erfordert eine kleine Rechnung, die natürlich nur angenähert sein kann. Wenn die kosmische Strahlung infolge des Magnetfeldes in einem bestimmten Raum, z. B. in unserem galaktischen System „eingeschlossen“ ist, so muß die Intensität durch das Gleichgewicht zwischen der erzeugten und absorbierten Strahlung bestimmt sein. Die Absorption findet hauptsächlich in der interstellaren Materie statt, deren Dichte nach astronomischen Berechnungen etwa $\rho = 10^{-25} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt²⁾. Wenn der Massenabsorptionskoeffizient $= \mu \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ und die experimentell gemessene Intensität der Strahlung $= w \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ist, wird der Energieverlust in einem Volumen von $U \text{ cm}^3$:

$$W = 3 w \rho \mu U \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Ist nun die Raumdichte der Doppelsterngeneratoren $1/U \text{ cm}^{-3}$, so muß der arithmetische Mittelwert ihrer Leistung gleich W sein. Nun ist nach Regener³⁾ $w = 3,53 \cdot 10^{-3} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}$. Der Absorptionskoeffizient variiert zwischen ziemlich weiten Grenzen, aber wir können $\mu = 5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ als einen Mittelwert annehmen. Die Raumdichte der Sterne in unserer Umgebung ist ungefähr 10^{-57} cm^{-3} . Nun sind zwar die meisten Sterne Doppelsterne, aber da ihre Leistung sehr klein wird, wenn der Abstand der Komponenten groß ist, kommen vielleicht nur etwa 10% von den Sternen als Generatoren in Frage. Setzen wir deshalb $1/U = 10^{-58} \text{ cm}^{-3}$, so wird

$$W = 5 \cdot 10^{28} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Dies ist also die Leistung, die die Doppelsterngeneratoren im Mittel haben müssen, um die auf der Erde gemessene Intensität der kosmischen Strahlung erzeugen zu können. Vergleichen wir diese Leistung mit der für

¹⁾ Die Existenz des Compton-Gettingschen Effektes ist mit dieser Vorstellung nicht unvereinbar. Vgl. l. c. (Ark. f. mat.). — ²⁾ Vgl. J. S. Plaskett u. J. A. Pease, Publ. Astr. Obs. Vict. 5, 167, 1933. — ³⁾ ZS. f. Phys. 80, 666, 1933.

den Generator in unserem Beispiel berechneten ($W = 5 \cdot 10^{29} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$), so finden wir, daß diese um eine Zehnerpotenz größer ist. Dies ist ungefähr das, was wir erwarten konnten, denn unser Beispiel bezieht sich ja auf einen ziemlich engen Doppelstern mit verhältnismäßig großer Leistung. Da alle Rechnungen selbstverständlich nur angenähert sind, muß die Übereinstimmung als befriedigend bezeichnet werden. Innerhalb der Fehlergrenzen (die wohl ein oder zwei Zehnerpotenzen sind!) *stimmt also die nach dieser Theorie berechnete Intensität der kosmischen Strahlung mit der experimentell gemessenen überein.* — Auch die dritte Schwierigkeit ist also überwunden, und es ist gezeigt, daß die Theorie mit den experimentell gefundenen Tatsachen wenigstens nicht im Widerspruch steht.

Über die Art der Teilchen in der kosmischen Strahlung. Die Strahlung, die durch die Doppelsterngeneratoren erzeugt wird, muß aus verschiedenen Arten von geladenen Teilchen bestehen, und zwar in ungefähr derjenigen Mischung, in der sie in der Umgebung der Sterne vorkommen. Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Mischung gerade durch die Entladung gestört wird, so daß z. B. Positronen wahrscheinlich bei der Entladung durch Sekundärprozesse erzeugt werden. — Bevor die durch den Generator erzeugte Strahlung die Erde trifft, muß sie aber sehr lange (im Mittel etwa 10^9 Jahre) im Welt-raum umherirren. Die verschiedene Absorbierbarkeit der Teilchenarten und die Sekundärprozesse in der interstellaren Materie müssen dann eine beträchtliche Veränderung der Zusammensetzung der Strahlung hervorrufen. Eine genaue Kenntnis von diesen Prozessen haben wir noch nicht, und es dürfte deshalb unmöglich sein, die Theorie mit den experimentellen Tatsachen in dieser Hinsicht zu vergleichen.

Zusammenfassung.

Die in einer früheren Arbeit gegebene Theorie über die Entstehung der kosmischen Strahlung wird näher ausgeführt. Um die bis jetzt bekannten Eigenschaften der kosmischen Strahlung (bevor sie die Erde trifft) zu erklären, sind hauptsächlich nur zwei Annahmen nötig:

Erstens: Die Sterne — auch die einzelnen Komponenten der Doppelsterne — sind magnetische Dipole, genau so wie die Sonne und die Erde. — Dies ist sehr wahrscheinlich.

Zweitens: Im interstellaren Raum innerhalb des galaktischen Systems gibt es Magnetfelder, deren mittlere Feldstärke wenigstens 10^{-13} bis 10^{-11} Gauß beträgt. — Auch diese Annahme ist aus mehreren Gründen wahrscheinlich berechtigt.

Wie gestalten sich nun die drei erwähnten Schwierigkeiten bei der Annahme, daß es interstellare Magnetfelder gibt? Die erste Schwierigkeit fällt sofort weg, denn durch die krummlinige Bewegung in den Magnetfeldern müssen ja die geladenen Teilchen so gestreut werden, daß sie etwa gleichmäßig aus allen Richtungen kommen¹⁾. — Ferner muß die Intensität der geladenen Teilchen — aber nicht die der ungeladenen Teilchen! — sehr viel vergrößert werden, weil jene im Magnetfeld geschlossene (oder besser beinahe geschlossene) Kurven beschreiben. Dies erklärt, daß fast nur geladene Teilchen die Erde als kosmische Strahlung treffen. Auch die zweite Schwierigkeit läßt sich also überwinden.

Die dritte Schwierigkeit erfordert eine kleine Rechnung, die natürlich nur angenähert sein kann. Wenn die kosmische Strahlung infolge des Magnetfeldes in einem bestimmten Raum, z. B. in unserem galaktischen System „eingeschlossen“ ist, so muß die Intensität durch das Gleichgewicht zwischen der erzeugten und absorbierten Strahlung bestimmt sein. Die Absorption findet hauptsächlich in der interstellaren Materie statt, deren Dichte nach astronomischen Berechnungen etwa $\rho = 10^{-25} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt²⁾. Wenn der Massenabsorptionskoeffizient $= \mu \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ und die experimentell gemessene Intensität der Strahlung $= w \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ist, wird der Energieverlust in einem Volumen von $U \text{ cm}^3$:

$$W = 3 w \rho \mu U \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Ist nun die Raumdichte der Doppelsterngeneratoren $1/U \text{ cm}^{-3}$, so muß der arithmetische Mittelwert ihrer Leistung gleich W sein. Nun ist nach Regener³⁾ $w = 3,53 \cdot 10^{-3} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}$. Der Absorptionskoeffizient variiert zwischen ziemlich weiten Grenzen, aber wir können $\mu = 5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ als einen Mittelwert annehmen. Die Raumdichte der Sterne in unserer Umgebung ist ungefähr 10^{-57} cm^{-3} . Nun sind zwar die meisten Sterne Doppelsterne, aber da ihre Leistung sehr klein wird, wenn der Abstand der Komponenten groß ist, kommen vielleicht nur etwa 10% von den Sternen als Generatoren in Frage. Setzen wir deshalb $1/U = 10^{-58} \text{ cm}^{-3}$, so wird

$$W = 5 \cdot 10^{28} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Dies ist also die Leistung, die die Doppelsterngeneratoren im Mittel haben müssen, um die auf der Erde gemessene Intensität der kosmischen Strahlung erzeugen zu können. Vergleichen wir diese Leistung mit der für

¹⁾ Die Existenz des Compton-Gettingschen Effektes ist mit dieser Vorstellung nicht unvereinbar. Vgl. l. c. (Ark. f. mat.). — ²⁾ Vgl. J. S. Platt u. J. A. Pease, Publ. Astr. Obs. Vict. 5, 167, 1933. — ³⁾ ZS. f. Phys. 80, 666, 1933.

den Generator in unserem Beispiel berechneten ($W = 5 \cdot 10^{29} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$), so finden wir, daß diese um eine Zehnerpotenz größer ist. Dies ist ungefähr das, was wir erwarten konnten, denn unser Beispiel bezieht sich ja auf einen ziemlich engen Doppelstern mit verhältnismäßig großer Leistung. Da alle Rechnungen selbstverständlich nur angenähert sind, muß die Übereinstimmung als befriedigend bezeichnet werden. Innerhalb der Fehlergrenzen (die wohl ein oder zwei Zehnerpotenzen sind!) *stimmt also die nach dieser Theorie berechnete Intensität der kosmischen Strahlung mit der experimentell gemessenen überein.* — Auch die dritte Schwierigkeit ist also überwunden, und es ist gezeigt, daß die Theorie mit den experimentell gefundenen Tatsachen wenigstens nicht im Widerspruch steht.

Über die Art der Teilchen in der kosmischen Strahlung. Die Strahlung, die durch die Doppelsterngeneratoren erzeugt wird, muß aus verschiedenen Arten von geladenen Teilchen bestehen, und zwar in ungefähr derjenigen Mischung, in der sie in der Umgebung der Sterne vorkommen. Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Mischung gerade durch die Entladung gestört wird, so daß z. B. Positronen wahrscheinlich bei der Entladung durch Sekundärprozesse erzeugt werden. — Bevor die durch den Generator erzeugte Strahlung die Erde trifft, muß sie aber sehr lange (im Mittel etwa 10^9 Jahre) im Welt-raum umherirren. Die verschiedene Absorbierbarkeit der Teilchenarten und die Sekundärprozesse in der interstellaren Materie müssen dann eine beträchtliche Veränderung der Zusammensetzung der Strahlung hervorrufen. Eine genaue Kenntnis von diesen Prozessen haben wir noch nicht, und es dürfte deshalb unmöglich sein, die Theorie mit den experimentellen Tatsachen in dieser Hinsicht zu vergleichen.

Zusammenfassung.

Die in einer früheren Arbeit gegebene Theorie über die Entstehung der kosmischen Strahlung wird näher ausgeführt. Um die bis jetzt bekannten Eigenschaften der kosmischen Strahlung (bevor sie die Erde trifft) zu erklären, sind hauptsächlich nur zwei Annahmen nötig:

Erstens: Die Sterne — auch die einzelnen Komponenten der Doppelsterne — sind magnetische Dipole, genau so wie die Sonne und die Erde. — Dies ist sehr wahrscheinlich.

Zweitens: Im interstellaren Raum innerhalb des galaktischen Systems gibt es Magnetfelder, deren mittlere Feldstärke wenigstens 10^{-13} bis 10^{-11} Gauß beträgt. — Auch diese Annahme ist aus mehreren Gründen wahrscheinlich berechtigt.

Aus diesen beiden Annahmen folgt:

1. Bei der Rotation der Doppelsterne werden nach den klassischen elektrodynamischen Gesetzen geladene Teilchen bis zu Energien von 10^{10} oder 10^{11} (ja sogar 10^{12}) e-Volt beschleunigt. (Vgl. Abschnitt I.)

2. Die von den Doppelsternengeneratoren erzeugte Strahlung von geladenen Teilchen wird durch die interstellaren Magnetfelder (nach der zweiten Annahme) gestreut, so daß sie die Erde aus allen Richtungen annähernd gleichförmig trifft. Die Strahlung ist deshalb von der Sternzeit weitgehend unabhängig. (Vgl. Abschnitt II.)

3. Durch die interstellaren Magnetfelder werden alle geladenen Teilchen ganz oder teilweise in dem galaktischen System „eingeschlossen“, aber alle ungeladenen Teilchen (die durch Sekundärprozesse erzeugt werden müssen), können es geradlinig verlassen. Die Strahlung besteht deshalb fast ausschließlich aus geladenen Teilchen. (Vgl. Abschnitt II.)

4. Die experimentell gemessene Intensität der kosmischen Strahlung ist in (zwar sehr grober) größenordnungsmäßiger Übereinstimmung mit den theoretisch zu erwartenden Werten. (Vgl. Abschnitt II.)

5. Die Energie der kosmischen Strahlung wird der Gravitationsenergie der Doppelsterne entnommen. In 10^{10} Jahren wird im allgemeinen weniger als 1% ihrer Gravitationsenergie in kosmische Strahlungsenergie verwandelt. Die Theorie ist also aus energetischen Gründen durchaus möglich. (Vgl. Abschnitt I.)

Stockholm, Nobelinstitut für Physik, 1. September 1937.

Über die Absorption des Kupfersulfats und ihre Beeinflussung durch schweres Kristallwasser.

Von B. Duhm.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1937.)

In Weiterführung der Untersuchung über den Einfluß des Kristallwassers auf die Absorption von festen Körpern wurde das Absorptionsspektrum von Kupfersulfatkristallen mit leichtem und schwerem Kristallwasser in dem Gebiet von 190 bis 1800 $m\mu$ untersucht. Gefunden wurde eine Verschmälerung und Intensitätsverringern der Absorptionsbande des Cu^{++} -Ions beim Einbau von schwerem Kristallwasser.

Versuchsanordnung. Vom Ultravioletten übers Sichtbare bis etwa 800 $m\mu$ wurden die Absorptionsspektren mit lichtelektrischer Photometrie ausgemessen. Im langwelligen Gebiet wurde eine Mollsche Thermosäule benutzt.

Als Lichtquelle dienten im UV teils eine Quecksilberlampe, teils Funken zwischen verschiedenen Metallen (Cd, Zn und Al), deren Licht durch einen Quarzdoppelmonochromator monochromatisch gemacht wurde. Ein Teil des monochromatischen Lichtes fiel durch den zu untersuchenden Kristall auf eine Na-Photozelle, ein seitlich abgezwiegt Teil des Lichtes in eine gleichgebaute Vergleichszelle. Die jede der beiden Photozellen durchfließenden Elektrizitätsmengen wurden mit einem Einfadenelektrometer bestimmt. Zur genaueren Orientierung verweise ich auf die Beschreibung einer gleichen Apparatur von Prof. Pohl¹⁾.

Im Sichtbaren und im Roten wurde als Lichtquelle eine Wolframspindellampe verwandt, deren Licht ebenfalls durch doppelte spektrale Zerlegung monochromatisiert wurde²⁾. Die vom Kristall hindurchgelassene Lichtintensität wurde von 450 bis etwa 800 $m\mu$ mit einer K-Photozelle, von 800 bis 1000 $m\mu$ mit einer Cs-Zelle und Elektrometer bestimmt³⁾. Noch weiter im Roten dienten Thermosäule und Galvanometer als Meßinstrumente. Die Wellenlängeneichnung geschah mit einem Taschenspektroskop mit geeichter Wellenskala und im Ultraroten mit Hilfe der Wasserbanden.

¹⁾ Nachr. d. Göttinger Akad. d. Wiss., Math.-Phys. Kl., S. 185, 1926. —

²⁾ Herrn Prof. Pohl danke ich für die Erlaubnis, mit den Doppelmonochromatoren des I. Physikalischen Instituts arbeiten zu dürfen. — ³⁾ Herrn Dr. Rögner, der einen Teil der Messungen in diesem Gebiete ausführte, möchte ich an dieser Stelle dafür danken.

Aus diesen beiden Annahmen folgt:

1. Bei der Rotation der Doppelsterne werden nach den klassischen elektrodynamischen Gesetzen geladene Teilchen bis zu Energien von 10^{10} oder 10^{11} (ja sogar 10^{12}) e-Volt beschleunigt. (Vgl. Abschnitt I.)

2. Die von den Doppelsternengeneratoren erzeugte Strahlung von geladenen Teilchen wird durch die interstellaren Magnetfelder (nach der zweiten Annahme) gestreut, so daß sie die Erde aus allen Richtungen annähernd gleichförmig trifft. Die Strahlung ist deshalb von der Sternzeit weitgehend unabhängig. (Vgl. Abschnitt II.)

3. Durch die interstellaren Magnetfelder werden alle geladenen Teilchen ganz oder teilweise in dem galaktischen System „eingeschlossen“, aber alle ungeladenen Teilchen (die durch Sekundärprozesse erzeugt werden müssen), können es geradlinig verlassen. Die Strahlung besteht deshalb fast ausschließlich aus geladenen Teilchen. (Vgl. Abschnitt II.)

4. Die experimentell gemessene Intensität der kosmischen Strahlung ist in (zwar sehr grober) größenordnungsmäßiger Übereinstimmung mit den theoretisch zu erwartenden Werten. (Vgl. Abschnitt II.)

5. Die Energie der kosmischen Strahlung wird der Gravitationsenergie der Doppelsterne entnommen. In 10^{10} Jahren wird im allgemeinen weniger als 1% ihrer Gravitationsenergie in kosmische Strahlungsenergie verwandelt. Die Theorie ist also aus energetischen Gründen durchaus möglich. (Vgl. Abschnitt I.)

Stockholm, Nobelinstitut für Physik, 1. September 1937.

Über die Absorption des Kupfersulfats und ihre Beeinflussung durch schweres Kristallwasser.

Von B. Duhm.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1937.)

In Weiterführung der Untersuchung über den Einfluß des Kristallwassers auf die Absorption von festen Körpern wurde das Absorptionsspektrum von Kupfersulfatkristallen mit leichtem und schwerem Kristallwasser in dem Gebiet von 190 bis 1800 $m\mu$ untersucht. Gefunden wurde eine Verschmälerung und Intensitätsverringern der Absorptionsbande des Cu^{++} -Ions beim Einbau von schwerem Kristallwasser.

Versuchsanordnung. Vom Ultraviolettens über Sichtbare bis etwa 800 $m\mu$ wurden die Absorptionsspektren mit lichtelektrischer Photometrie ausgemessen. Im langwelligen Gebiet wurde eine Mollsche Thermosäule benutzt.

Als Lichtquelle dienten im UV teils eine Quecksilberlampe, teils Funken zwischen verschiedenen Metallen (Cd, Zn und Al), deren Licht durch einen Quarzdoppelmonochromator monochromatisch gemacht wurde. Ein Teil des monochromatischen Lichtes fiel durch den zu untersuchenden Kristall auf eine Na-Photozelle, ein seitlich abgezwiegt Teil des Lichtes in eine gleichgebaute Vergleichszelle. Die jede der beiden Photozellen durchfließenden Elektrizitätsmengen wurden mit einem Einfadenelektrometer bestimmt. Zur genaueren Orientierung verweise ich auf die Beschreibung einer gleichen Apparatur von Prof. Pohl¹⁾.

Im Sichtbaren und im Roten wurde als Lichtquelle eine Wolframspindellampe verwandt, deren Licht ebenfalls durch doppelte spektrale Zerlegung monochromatisiert wurde²⁾. Die vom Kristall hindurchgelassene Lichtintensität wurde von 450 bis etwa 800 $m\mu$ mit einer K-Photozelle, von 800 bis 1000 $m\mu$ mit einer Cs-Zelle und Elektrometer bestimmt³⁾. Noch weiter im Roten dienten Thermosäule und Galvanometer als Meßinstrumente. Die Wellenlängeneichnung geschah mit einem Taschenspektroskop mit geeichter Wellenskala und im Ultraroten mit Hilfe der Wasserbanden.

¹⁾ Nachr. d. Göttinger Akad. d. Wiss., Math.-Phys. Kl., S. 185, 1926. —

²⁾ Herrn Prof. Pohl danke ich für die Erlaubnis, mit den Doppelmonochromatoren des I. Physikalischen Instituts arbeiten zu dürfen. — ³⁾ Herrn Dr. Rögner, der einen Teil der Messungen in diesem Gebiete ausführte, möchte ich an dieser Stelle dafür danken.

Die Reflexionsverluste an Vorder- und Rückseite der Kristallplättchen wurden in bekannter Weise stets dadurch eliminiert, daß durch eine Schlittenführung abwechselnd die zu untersuchenden Kristalle und ein Vergleichskristall aus einem in dem betreffenden Gebiet völlig durchsichtigen Material (KCl oder KBr) in den Strahlengang gebracht wurden.

Herstellung der Kristalle. Die $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ -Kristalle wurden durch Verdunsten ihrer bei einer mittleren Zimmertemperatur gesättigten, wässrigen Lösung, die keimfrei filtriert war, in der benötigten Größe und Klarheit erhalten. Zur Gewinnung von D_2O -haltigen Kristallen wurde völlig entwässertes Kupfersulfat in einer kleinen Menge schweren Wassers bis zur Sättigung gelöst. Um den Gehalt der Lösung an D_2O durch Austausch mit dem Wasserdampf der Luft nicht zu vermindern und um den Verlust des schweren Wassers zu vermeiden, befand sich die Lösung bei geringem Druck in dem einen Schenkel eines U-förmigen Gefäßes, während der andere Schenkel mit Eis gekühlt wurde. Die Kristallisationsgeschwindigkeit konnte durch passende Wahl des Temperaturgefälles und des Druckes geregelt werden.

Es gelangten nur solche Kristalle zur Verwendung, die durch und durch klar und störungsfrei waren. Alle Kristalle wurden planparallel zu der am besten ausgebildeten Prismenfläche geschliffen und mit größter Sorgfalt poliert. Ihre verschiedenen Dicken, die mit dem Zeiss'schen Dickenmesser bestimmt wurden, lagen im Bereich von 0,01 bis 0,15 cm. Für ein und dieselbe Messung wurden immer H_2O - und D_2O -Plättchen von möglichst derselben Dicke verwandt.

Außerdem wurden im UV noch Messungen mit wässrigen Lösungen von Kupfersulfat, Kaliumsulfat und Magnesiumsulfat vorgenommen. In Quarzküvetten, von etwa 1 mm Dicke, wurden Lösung und Lösungsmittel miteinander verglichen. Die Konzentration der Kupfersulfatlösungen wurde nachträglich ermittelt durch Dichtebestimmung und Analyse einer abgewogenen Menge Lösung. Hieraus berechnet sich die Konzentration c einer Lösung (in Mol/Liter) nach der Formel:

$$c = \frac{g \cdot s \cdot 1000}{G \cdot M},$$

wo bedeutet: G = Gewicht der abgewogenen Menge Lösung, g = Gewicht des darin enthaltenen Salzes, M = Molekulargewicht, s = Dichte der Lösung.

Die Konzentration der Lösungen der beiden anderen Salze wurde durch Einwiegen bestimmt. Obgleich diese Methode ungenauer ist, war sie wegen der sehr schwachen Absorption selbst gesättigter Lösungen dieser Salze völlig ausreichend.

Ergebnisse. In Fig. 1 ist das Absorptionsspektrum von $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ - und von $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{D}_2\text{O}$ -Kristallen aufgezeichnet. Auf der Abszisse sind die Wellenlängen in $\text{m}\mu$ und in e-Volt aufgetragen, auf der Ordinate die dazu gehörigen α -Werte, die nach dem Beer-Lambertschen Gesetz in folgender Form berechnet wurden: $J/J_0 = e^{-\alpha d}$, wo d = Dicke des Kristalls in cm

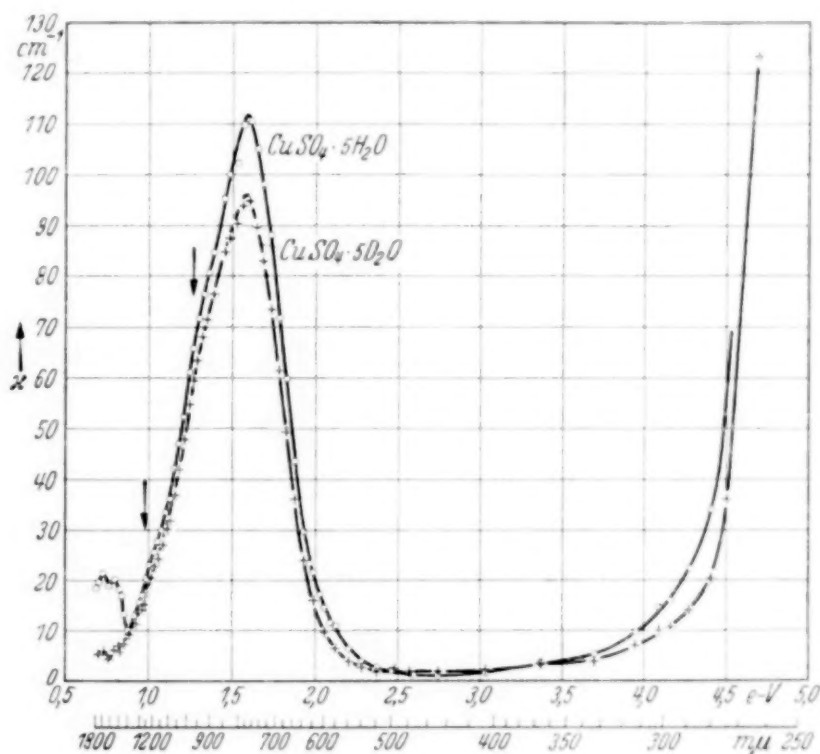


Fig. 1.

ist. Die Kurven wurden aus einer großen Zahl von Messungen mit verschiedenen Kristallen und verschiedenen Kristalldicken gewonnen. Die Streuung der α -Werte der einzelnen Messungen betrug im allgemeinen $\pm 0,5 \text{ cm}^{-1}$ mit Ausnahme der Stellen stärkster Absorption, wo infolge der geringen Ausschläge die Meßgenauigkeit wesentlich kleiner war.

Aus zahlreichen Messungen anderer Autoren an verschiedenen Kupfersalzen geht eindeutig hervor, daß die Bande im Roten (Maximum bei $\sim 790 \text{ m}\mu$) dem Cu^{++} -Ion zuzuschreiben ist. So liegt z. B. das Absorptionsmaximum von CuCl_2 , CuBr_2 und $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ ebenfalls bei $\sim 790 \text{ m}\mu^1$. Unter dem Einfluß anderer Molekelpartner kann die Lage der Bande sich

¹⁾ H. S. French u. T. M. Lowry, Proc. Roy. Soc. London (A) **106**, 489, 1924.

auch verschoben etwa in den Grenzen von $\sim 600 \text{ m}\mu$ beim $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4]\text{SO}_4$ bis zu $\sim 960 \text{ m}\mu$ beim K_2CuCl_4 .

Über den Träger der Absorption im UV hingegen sind in der älteren Literatur z. T. einander widersprechende Ansichten vertreten worden¹⁾. Doch wird wohl auch diese Absorption vom Cu^{++} -Ion bewirkt. Denn die an Lösungen von Kaliumsulfat und Magnesiumsulfat hier ausgeführten Messungen zeigen auch in hoher Konzentration gegenüber den schwach konzentrierten Kupfersulfatlösungen eine bei viel kürzeren Wellen einsetzende und um Größenordnungen kleinere Absorption (Fig. 2). Müßte

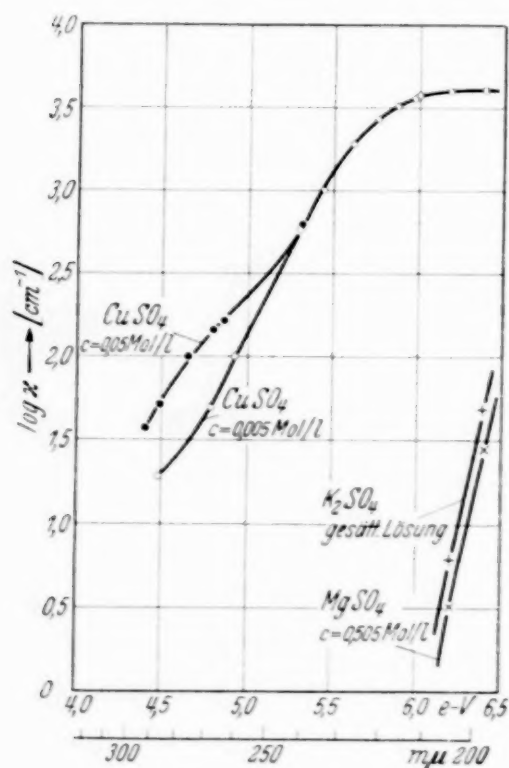


Fig. 2.

man das Anion für die Absorption verantwortlich machen, so dürfte ein Wechsel der Kationen nicht einen derartigen Effekt bewirken. Z. B. wird auch die NO_3^- -Bande bei $\sim 300 \text{ m}\mu$ durch einen Wechsel der Kationen wenig oder gar nicht beeinflusst, wie Messungen an $\text{Cr}(\text{NO}_3)_2$, NaNO_3 , AgNO_3 , $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$, $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$, $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$, KNO_3 und $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ zeigen²⁾.

Was nun den Einfluß des schweren Wassers anbetrifft, so ist, wie schon aus der deutlich erkennbaren grünlicheren Farbe der D_2O -Kristalle, die bereits in Lösung auffällt³⁾, gegenüber den blauen H_2O -Kristallen zu erwarten

war, die Absorption der D_2O -Kristalle im langwelligen Teil des sichtbaren Spektrums geringer als die der gewöhnlichen Kristalle (Fig. 1). Diesen Unterschied in der Absorption findet man in dem ganzen hier untersuchten Gebiet wieder mit Ausnahme des mittleren Teiles (etwa zwischen 350 und 500 $\text{m}\mu$), wo die Lage der Meßpunkte zu wenig verschieden ist, um von einer Differenz in der Absorption sprechen zu können. Anders ausgedrückt kann man im ultravioletten Absorptionsanstieg von einer Blauverschiebung,

¹⁾ H. Ley, ZS. f. anorg. Chem. **173**, 287, 1928; R. Mecke u. H. Ley, ZS. f. phys. Chem. **111**, 385, 1924; H. S. French u. T. M. Lowry l. c. —

²⁾ H. Schaumann, ZS. f. Phys. **76**, 106, 1932; H. S. French u. T. M. Lowry l. c. — ³⁾ J. Bell, Nature **137**, 534, 1936.

im kurzwelligen Abfall der roten Bande dagegen von einer Rotverschiebung der D_2O -Kurve gegenüber der H_2O -Kurve sprechen. Für die Größe dieser Verschiebung findet man an verschiedenen Stellen der Kurve Werte, die zwischen 100 und 200 Å liegen. Dieser sehr unterschiedliche Verlauf der beiden Kurven tritt in Fig. 1 im roten Teil des Spektrums weniger deutlich hervor als im blauen Gebiet infolge des benutzten Energiemaßstabes.

Ein anderes Bild ergibt sich aber, wenn man die Absorptionsbande bis ins Ultrarote hinein verfolgt. Wie aus Fig. 1 zu ersehen ist, handelt es sich in Wirklichkeit nicht um eine Verschiebung der Bande, sondern um eine geringere Verbreiterung und um eine geringere Intensität der D_2O -Bande gegenüber der H_2O -Bande. Die Zusammendrängung ist recht erheblich, entsprechend der allgemeinen Regel, daß eine Linie um so empfindlicher für Änderungen der Umgebung ist, je breiter sie ist. Dies gilt selbstverständlich nicht für eine durch Temperaturbewegung verursachte Unschärfe.

Wenn man nach der Art des Übergangs sucht, welcher der roten Cu-Bande entspricht, so ergibt sich aus dem Integral $\int \chi(r) dr$ die Zahl der Ersatzoszillatoren pro Atom zu $1/5$. Die Bande gehört also keinem „verbotenen“ Übergang an wie die Chromlinien mit der Oszillatorenstärke von etwa 10^{-7} . Sie wird daher mit einer Änderung der Hauptquantenzahl verknüpft sein. Hieraus erklärt sich ihre verhältnismäßig große Unschärfe, denn jetzt greift im angeregten Zustand die Bahn des Leuchtelektrons mit in die Elektronenhülle der Umgebung ein. Natürlich kann man in diesem Falle keine scharfen, gut trennbaren Energiestufen mehr erwarten. Die besonders im unteren Teil der roten Bande auftretende Verschmälerung der D_2O -Kurve gegenüber der H_2O -Kurve, die eine Verminderung des eben erwähnten Störungseffektes zeigt, ist wohl durch die geringere Amplitude der Nullpunktsschwingung des D_2O bedingt. Da, wie aus Messungen von Saur¹⁾ hervorgeht, trotz der geringeren Raumbeanspruchung der D_2O -Moleküle keine Gitterkontraktion eintritt, wird die dem absorbierenden Cu^{++} -Ion angehörende Ladungswolke nicht so weit in die D_2O -Moleküle übergreifen können. Infolgedessen wird also eine weniger starke Verwaschung der Energieniveaus auftreten, was sich in einer Verschmälerung der Absorptionsbande äußert.

Wahrscheinlich wird auch im UV eine der roten Bande ähnliche Absorptionsbande vorhanden sein. Nur konnte wegen der ungeheuer viel

¹⁾ E. Saur, ZS. f. Krist., im Druck.

stärkeren Absorption und der praktischen Schwierigkeit, gut polierte Kristallschliffe von einigen μ Dicke herzustellen, der Verlauf der Kurven in diesem Gebiet nicht weiter verfolgt werden. Jedenfalls deutet auch hier der Unterschied im Verlauf der beiden Kurven eine ähnliche Versmälnerung beim Einbau von D_2O an.

Zu Fig. 1 ist noch zu bemerken, daß die vom Kristallwasser herührenden Wasserbanden weit im Roten recht deutlich hervortreten, während sie im Gebiet der einsetzenden Cu^{++} -Absorption nur noch als schwache Buckel im langwelligen Anstieg der roten Bande in Erscheinung treten.

Herrn Prof. Dr. G. Joos möchte ich für Anregung und Diskussion dieser Arbeit meinen besten Dank aussprechen.

Göttingen, Zweites Physikalisches Institut der Univ., September 1937.

(Aus dem Institut für theor. Physik der Universität Freiburg i. Br.)

Bestimmung von Bindungsmomenten durch ultrarote Absorptionsmessungen¹⁾.

Von R. Mecke in Freiburg i. Br.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 14. Oktober 1937.)

Es wird am Beispiel des Wassers gezeigt, wie man durch Absorptionsmessungen im ultraroten Schwingungsspektrum bei charakteristischen Valenzschwingungen mehratomiger Moleküle zu einer experimentellen Bestimmung des Dipolmoments der betreffenden Valenzbindung kommt. Das Bindungsmoment des OH-Radikals ergibt sich in Übereinstimmung mit der elektrischen Dipolmessung zu $1,5 \cdot 10^{-18}$.

In der ersten Arbeit²⁾ habe ich gezeigt, wie man bei charakteristischen Valenzschwingungen, bei denen die Energie weitgehend in einer Bindung lokalisiert bleibt, aus der Intensität der einzelnen Oberschwingungen das Bindungsmoment bestimmen kann, d. h. denjenigen Anteil des Dipolmoments, der bei der Trennung einer homöopolaren Valenz verschwindet. Das Verfahren besteht darin, daß man zunächst aus der Gesamtaborption der Bande

$$n A' = r_{0v} \int (n \varepsilon' / r) dv \quad (1)$$

— ε' bezogen auf die Molzahl der Bindungen pro cm^3 — durch Multiplikation mit einer Normierungsfunktion $f(k)_{0v}/r_0 x$ der Anharmonizität $k = 1/x$ die Übergangsmomente

$$\bar{\mu}_{0v}/ar_0 = 1,98 \cdot 10^{-21} \sqrt{n A' f(k)_{0v}/r_0 x} \quad (2)$$

ermittelt und diese dann in einem $\bar{\mu}_{0v}/ar_0, v$ -Diagramm in Abhängigkeit von der Quantenzahl v aufträgt. Der Schnittpunkt der Kurve mit der Ordinate $v = 0$ ergibt dann direkt das gesuchte Bindungsmoment. Die Anwendbarkeit dieser Methode verlangt allerdings, daß das Bindungsmoment in eine Potenzreihe nach $y = e^{-a(r-r_0)}$, dem Parameter der Morseschen Potentialfunktion, entwickelbar ist, und daß zum mindesten so viele aufeinanderfolgende Banden der Serie zur Ausmessung gelangen, als Glieder bei der Potenzreihenentwicklung berücksichtigt werden müssen.

¹⁾ Nach dem Vortrag, gehalten auf der Physiker-Tagung in Bad Kreuznach am 24. September 1937. — ²⁾ R. Mecke, ZS. phys. Chem. (B) **33**, 156, 1936; im folgenden als Arbeit I zitiert.

Über den tatsächlichen Verlauf des Dipolmoments einer Bindung in Abhängigkeit vom Kernabstand wissen wir aber heute fast gar nichts. Die Begriffsbildung der homöopolaren Bindung setzt lediglich voraus, daß bei der Trennung der Valenz das Moment verschwindet, ebenso wird im anderen Grenzfalle der vereinigten Kerne das Moment zu Null angenommen. Weitere Modellvorstellungen über die Art der Ladungsverschiebungen, die beim Auseinanderführen der Kerne auftreten, fehlen jedoch. Wir wissen an Hand des experimentellen Tatsachenmaterials nur noch, daß in den meisten Fällen die größte Ladungstrennung, d. h. das Maximalmoment, nicht mit der Gleichgewichtslage der Kerne (Potentialminimum) zusammenfallen kann, da in diesem Falle die Grundbande $v = 1$ in Absorption nur sehr schwach auftreten darf.

Im folgenden will ich nun zeigen, daß beim Beispiel der Wasserabsorption — und damit wahrscheinlich auch bei den meisten übrigen Hydridverbindungen — für die Darstellung des Momentverlaufes bereits eine zweigliedrige Reihe genügt, die zu einer sehr einfachen Beziehung zwischen Übergangsmoment und Quantenzahl führt. Dadurch ist aber die Anwendbarkeit der Methode zur praktischen Bestimmung von XH -Bindungsmomenten in mehratomigen Molekülen erwiesen.

Wir setzen also

$$\mu_B = c_1 y - c_2 y^2 \dots \quad (3)$$

und hätten mit diesem Ansatz den Kurvenverlauf der Morseschen Potentialfunktion $P = -D(2y - y^2)$, allerdings mit dem Unterschied, daß der Extremwert nicht wie bei dieser bei $y = 1$ (Gleichgewichtslage), sondern bei $y = c_1/2c_2$ zu liegen kommt. Hieraus erhält man dann nach Gleichung (10) in Arbeit I für das Übergangsmoment die Beziehung:

$$\bar{\mu}_{0v}/ar_0 = [c_1 - c_2(v+1)(1-vx)](1 - (v+1)x), \quad (4)$$

also im μ_{0v}, v -Diagramm eine monoton fallende, wegen $x \ll 1$ nahezu geradlinige Kurve. Führen wir daher an Stelle der beiden Konstanten c_1 und c_2 den Schnittpunkt der Kurve mit der Abszisse v_0 und die Neigung der Kurve an dieser Stelle ($d\bar{\mu}_{0v}/dv)_0 = (\mu')_0$ ein (Fig. 1), so läßt sich Gleichung (4) unter Vernachlässigung von Gliedern mit x^2 leicht umformen in

$$\bar{\mu}_{0v} = (\mu')_0 (v - v_0) (1 - 2(v - v_0)x). \quad (5)$$

Diese Gleichung ist aber formal identisch mit der der Schwingungsenergie der Bandenfolge

$$W_{0v} = (W')_0 v (1 - xv), \quad (6)$$

denn bei der Schwingungsenergie liegt der Schnittpunkt mit der Abszisse bekanntlich bei $v_0 = 0$.

Wir stellen somit als wichtiges Resultat fest, daß im Falle der Gültigkeit von Gleichung (3) die Übergangsmomente $\bar{\mu}_{0v}$ und die Frequenzfolge r_{0v} der Banden die gleiche v -Abhängigkeit (vom Faktor 2 x abgesehen) aufweisen und sich lediglich im Beginn der v -Zählung unterscheiden. Dieser v_0 -Wert ist also zunächst zu bestimmen und beim Wasser läßt er sich tatsächlich aus den vorliegenden Messungen ermitteln.

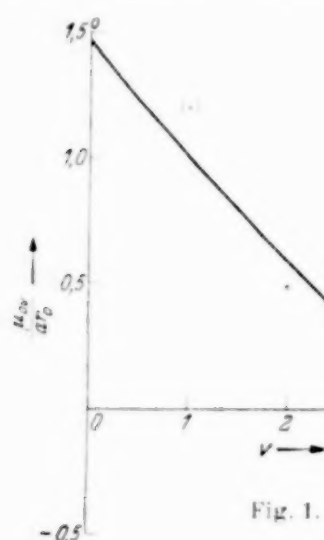
Collins¹⁾ hat nämlich für flüssiges Wasser den Absorptionsverlauf der drei Banden $v = 2$ (1,45 μ), 3 (0,98 μ) und 4 (0,75 μ) bei verschiedenen Temperaturen bestimmt. Durch Ausplanimetrieren seiner Kurven (es wurden die Messungen für die höchsten Temperaturen 90° bis 95° gewählt) erhält man die in Tabelle 1 angegebenen nA' -Werte, durch Division mit 2 bezogen auf eine OH-Bindung. Als k -Wert, der sich in diesem Falle wegen der Breite der Banden und der Ungenauigkeit der Wellenlängenmessungen nicht sehr genau festlegen läßt²⁾, wurde $k = 55$ gewählt. Hieraus berechnen sich dann nach Gleichung (2) die in der vorletzten Spalte der Tabelle angegebenen $\bar{\mu}_{0v}/ar_0$ -Werte. Leider fehlen nun entsprechende Messungen für die Grundbande $v = 1$ bei 3,0 μ und es liegt lediglich eine ältere, nicht sehr zuverlässige Bestimmung des Absorptionsmaximums³⁾ vor. Da aber bei den drei Banden $v = 2, 3$ und 4 das Verhältnis A'/ϵ'_{\max} , d. h. die Bandenbreite, praktisch konstant ist, läßt sich $\bar{\mu}_{01}$ aus diesem ϵ'_{\max} -Wert ebenfalls abschätzen. Das Bindungsmoment selbst wurde schließlich aus dem elektrisch gemessenen Dipolmoment des Wassers ($1,85 \cdot 10^{-18}$) unter Zugrundelegung des bekannten Valenzwinkels (105°) berechnet. Über das Vorzeichen der einzelnen $\bar{\mu}_{0v}$ -Werte läßt sich selbstverständlich zunächst nichts aussagen. Versucht man aber mit diesen Zahlen jetzt eine vernünftige

Tabelle 1.

v	λ	ϵ_{\max}	$nA'/2$	A'/ϵ'_{\max}	$f(k)_{0v}$	$\bar{\mu}_{0v}/ar_0$
0	—	—	—	—	—	$1,52 \cdot 10^{-18}$
1	3,0 μ	$49 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{Mol}$	$(24 \cdot 10^6) \text{ cm/Mol}$	—	1	(1,2)
2	1,45	49,5	$24 \cdot 10^4$	740 cm^{-1}	13,7	0,45
3	0,98	9,9	$48 \cdot 10^2$	730	163	0,21
4	0,75	0,47	$2,6 \cdot 10^2$	830	1590	0,16

¹⁾ T. R. Collins, Phys. Rev. (2) **26**, 771, 1925. — ²⁾ Bei Wasserdampf ist $k = 49$, die Unsicherheit dürfte also nicht allzu groß sein. — ³⁾ E. Aschkinass, Wied. Ann. **55**, 401, 1895.

graphische Darstellung durchzuführen, so erhält man eine einfache Beziehung nur dann, wenn für $\bar{\mu}_{01}$, $\bar{\mu}_{02}$, $\bar{\mu}_{03}$ das gleiche, für $\bar{\mu}_{04}$ aber ein entgegengesetztes Vorzeichen gewählt wird. Damit ist der Schnittpunkt der



Kurve mit der Abszisse bei etwa $v_0 = 3,5$ festgelegt und Gleichung (4) führt zu der in Fig. 1 ausgezogenen Kurve:

$$\bar{\mu}_{0v}/ar_0 = -0,37(v-3,5)[1-2x(v-3,5)], \quad (7)$$

denen sich sämtliche Meßpunkte durchaus befriedigend anschließen.

Einen endgültigen Entscheid über die allgemeine Anwendbarkeit von Gleichung (3) dürften die vorliegenden Messungen vielleicht noch nicht zulassen.

wenigstens kennen wir aber jetzt zwei Beispiele, H_2O und HCl (siehe Arbeit I), bei denen die zweikonstantige Formel des μ -Verlaufs bereits eine ausreichende Näherung für das Bindungsmoment zu sein scheint:

$$H_2O: \mu_B = 1,48 (1,43 y - 0,43 y^2 \dots),$$

$$HCl: \mu_B = 1,04 (1,6 y - 0,6 y^2 \dots).$$

Es ist daher zu hoffen, daß auch in anderen Fällen — z. B. bei der CH -Bindung¹⁾ — eine ähnlich einfache Bestimmung des Momentes aus ultraroten Absorptionsmessungen sich ermöglichen läßt, auch wenn derartige Messungen nicht gerade leicht mit der erforderlichen Genauigkeit durchführbar sind.

Freiburg i. Br., Juli 1937.

¹⁾ Beim Chloroform könnte man die Messung der Absorptionsspitzen (siehe Th. Dreisch, ZS. f. Phys. **30**, 200, 1924) nehmen und erhält dann unter der Annahme gleicher Bandenbreite aus unserer $\bar{\mu}_{04}$ -Messung 0,30 (B. Timm u. R. Mecke, ZS. f. Phys. **98**, 363, 1935), für $\bar{\mu}_{02}$ (0,15) und $\bar{\mu}_{03}$ (0,22) kleinere Werte. Der Schnittpunkt v_0 wäre also bei etwa 2 anzunehmen, so daß unser damaliger Schätzwert 0,3 bis $0,4 \cdot 10^{-18}$ kaum überschritten werden kann.

Die Theorie der Ionosphäre.

I. Teil.

Von **R. C. Majumdar**, Bose Research Institute, Calcutta.

(Eingegangen am 19. Juli 1937.)

In Abschnitt 1 werden die physikalischen Eigenschaften, wie Leitfähigkeit, Dispersion, Absorption usw., quantenmechanisch für ein Medium aus freien Elektronen und Masseteilchen (positive oder negative Ionen, neutrale Atome oder Moleküle) untersucht, das sich in dem einfach periodischen elektrischen Feld der einfallenden Welle und einem konstanten äußeren Magnetfeld befindet. In Abschnitt 2 wird die Überlegung auf das spezielle Problem der Ionosphäre angewendet; hierbei ergeben sich allgemeine Formeln für Brechungsindex und Polarisation. Die genaue Auswertung der Ausdrücke für Dispersion, Absorption und Polarisation ist nur für ein „Ionosphärenmodell“, das aus Elektronen und positiven Ionen besteht, ausgeführt worden. Abschnitt 3 behandelt die möglichen Zusammensetzungen und Temperaturen der oberen Atmosphäre, wie sie sich bei einem Vergleich aus Beobachtung und Theorie ergeben. Im Schlußabschnitt wird der Quantelungseffekt diskutiert, der von dem äußeren Magnetfeld auf die Elektronenbewegung in der Ionosphäre induziert wird.

Einleitung. Das Gebiet der Ionosphäre zeigt während der letzten Jahre eine wachsende Anzahl von interessanten Untersuchungen und wesentlichen Diskussionen [1]. Der glänzende Erfolg Marconis im Jahre 1901 mit der Sendung drahtloser Wellen um die gekrümmte Oberfläche der Erde von Cornwall nach Neufundland, brachte nicht nur ein neues Zeitalter für die technische Welt, sondern regte auch die Theoretiker an, die rätselhafte Natur der Fortpflanzung drahtloser Wellen zu untersuchen. Diese Entdeckung sozusagen lenkte Physiker und Mathematiker wie Macdonald [2], Rayleigh [3], Poincaré [4] und andere [5] auf dieses neue Arbeitsgebiet. Obwohl bereits Kennely [6] und Heaviside [7] im Jahre 1902 unabhängig voneinander behaupteten, daß eine leitende Schicht in der oberen Atmosphäre vorhanden sein müsse, die die Radiowellen entsprechend der Erdkrümmung reflektiert, brachte 1912 erst Eccles [8] und endlich 1924 Larmor [9] die mathematische Theorie für die Fortpflanzung der Radiowellen durch die ionisierte Schicht der oberen Atmosphäre. Die Existenz solch einer ionisierten Schicht in der oberen Atmosphäre und ihre reflektierende Wirkung auf Radiowellen wurde direkt bewiesen durch verschiedene Forscher, besonders von Appleton [10] und seinen Mitarbeitern, während andererseits die Ionisierungsquelle von Pannekoek, Chapman und Appleton [11] ausführlich diskutiert wurde, die sie anscheinend haupt-

sächlich der Ultraviolettstrahlung der Sonne zugeschrieben. Die Ionisierung könnte indessen auch, wie Milne [12] behauptete, durch ungeladene Teilchen oder Korpuskeln veranlaßt werden, die aus der Sonne herausgeschossen worden sind. Es wurde aber weiter von Appleton [13], dem wir tatsächlich alle weiteren Entwicklungen verdanken, ausgeführt, daß das Magnetfeld der Erde eine merkliche Wirkung auf die Fortpflanzung der Radiowellen durch die ionisierte Atmosphäre haben würde, und die Eccles-Larmor-Theorie mußte also entsprechend verändert werden. Zu diesem Zweck behandelte er dieses spezielle Problem nach der magneto-ionischen Theorie von Lorentz und leitete erfolgreich die allgemeinen Formeln für Dispersion, Absorption usw. von Radiowellen, die sich in der Ionosphäre fortpflanzen, ab. In ungefähr der gleichen Zeit leitete auch Goldstein [14] ähnliche Formeln ab, und etwas später kam Hartree [15] im Laufe seiner Arbeiten über die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen in brechendem Medium- und Magnetfeld auf sehr elegante Art zu derselben Formel. Die sogenannten Appleton-Hartree-Goldstein-Formeln, die mit der strengen Methode der klassischen Physik abgeleitet worden sind, geben zwar die Möglichkeit, in großen Linien die Fortpflanzung der Radiowellen in der oberen Atmosphäre zu erklären, aber sind doch mehr oder weniger qualitativer Natur, da sie nicht genau und ausführlich genug sind. Deshalb scheint es angebracht zu sein, eine quantitative mathematische Theorie der Ionosphäre auszuarbeiten und ihre einzelnen physikalischen Eigenschaften vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik zu untersuchen. Die Ableitung der Grundformeln mit dieser neueren Theorie wird uns wenigstens in Einzelheiten des Problems führen und uns so die Möglichkeit geben, die Berechtigung der Anwendung der klassischen Theorie und die Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeit nachzuweisen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit wird also sein, eine Quantentheorie des Ionosphärenphänomens zu entwickeln. Wir werden dabei die Existenz von ionisierten Schichten voraussetzen, ohne nach der Ionisationsquelle zu fragen. Im ersten Abschnitt wird eine ganz allgemeine mathematische Formulierung des Problems vorgenommen und daraus die Ausdrücke für Dispersion, Absorption, Leitfähigkeit usw. in tensorieller Form abgeleitet. Im zweiten Abschnitt werden wir diese allgemeinen Formeln auf das Ionosphärenproblem anwenden und die Ausdrücke für Dispersion, Absorption und Polarisierung für zwei Sonderfälle auswerten. In Abschnitt 3 werden Zusammensetzung und Temperaturen der Ionosphäre durch Vergleich des beobachteten und des theoretisch gewonnenen Reflexionskoeffizienten diskutiert. Im Schlußabschnitt wird eine Übersicht gegeben über die

Voraussetzungen, die im Laufe der obigen Ableitung gemacht wurden, und die Größenordnung des Fehlers erörtert, der dadurch in unsere Berechnung gekommen sein könnte, daß die Wirkungen des äußeren Magnetfeldes auf die Quantelung der Elektronenbewegung in der vorliegenden Untersuchung vernachlässigt werden.

1. Mathematische Formulierung der Grundgleichung.

Wir wollen ein System von beliebig verteilten Masseteilchen (Ionen, neutrale Atome oder Moleküle) und Elektronen betrachten, die sich in dem Kraftfeld der Teilchen bewegen. Wir denken uns das schwere Teilchen als massives Kraftzentrum, von dem das Elektron ohne Änderung seiner Geschwindigkeit abgelenkt wird, d. h. keine Energie wird während des Zusammentreffens übertragen; die vorkommenden Stöße sind elastisch. Wir werden jetzt die Änderung der Verteilungsfunktion der Elektronen in einem solchen System untersuchen, auf das ein einfach periodisches elektrisches Feld der einfallenden Welle und ein konstantes äußeres Magnetfeld einwirkt. Wir vernachlässigen dabei das Magnetfeld der einfallenden Welle, was dadurch gerechtfertigt ist, daß die hier wirksame Lorentz-Kraft durch die Formel gegeben ist:

$$\vec{F} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]. \quad (1)$$

Hierin gilt für die Intensität des elektrischen Feldes

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Die Wirkung des magnetischen Feldes \vec{H} der Welle ist also, mit der des elektrischen Feldes verglichen, von der Größenordnung $|\vec{v}|/c$ und deshalb sehr klein. Wir werden also für \vec{H} nur das konstante äußere Magnetfeld annehmen. Die Änderung der Verteilungsfunktion f des Elektrons, die durch die gemeinsame Wirkung von elektrischem und magnetischem Feld einerseits und durch die Zusammenstöße mit den Masseteilchen andererseits entsteht, wird allgemein gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Feld}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} \quad (3)$$

oder ausführlich geschrieben [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad } f) + \left(\text{grad}_{\vec{K}} f \cdot \frac{\vec{F}}{h} \right) \\ + \iiint \omega(\vec{K} \vec{K}') [f(\vec{K}) - f(\vec{K}')] dK_x dK_y dK_z = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

hierin bedeuten der zweite und dritte Summand die Änderung der Verteilungsfunktion durch die Wirkung des elektrischen und des magnetischen Feldes, der letzte bezieht sich auf die Zusammenstöße zwischen Elektronen und Masseteilchen. $\text{grad}_{\vec{K}}$ bedeutet die Differentiation nach der Wellenzahl \vec{K} des Elektrons, z. B.: $(\text{grad}_{\vec{K}})_x = \frac{\partial}{\partial K_x}$, usw.

Die Gruppengeschwindigkeit \vec{v} ist gegeben durch

$$\vec{v} = \frac{h}{m} \vec{K} = \frac{1}{h} \text{grad}_{\vec{K}} \epsilon, \quad (5)$$

und die Übergangswahrscheinlichkeit des Elektrons vom Zustand \vec{K} zum Zustand \vec{K}' ist

$$\omega(\vec{K} \vec{K}') = |V_{\vec{K} \vec{K}'}|^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{h} (\epsilon - \epsilon') t}{(\epsilon - \epsilon')^2}, \quad (6)$$

wobei ϵ und ϵ' die Energien des Elektrons von und nach dem Übergang sind, und $V_{\vec{K} \vec{K}'}$ das Matricelement der gestörten Energie, das gegeben ist durch

$$V_{\vec{K} \vec{K}'} = \int \psi_{\vec{K}'}^* V(r) \psi_{\vec{K}} d\tau. \quad (7)$$

$\psi_{\vec{K}}$ und $\psi_{\vec{K}'}$ sind die Eigenfunktionen des Elektrons im Anfangs- und Endzustand und $V(r)$ ist das Potential des Elektrons im Feld des Massenteilchens.

Um Gleichung (4) aufzulösen, setzen wir

$$f = f_0 + f_1, \quad (8)$$

wobei f_0 die Fermische Verteilungsfunktion ohne Feld und f_1 die durch die Störung bestimmt ist.

Außerdem ist

$$f_0 = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\epsilon/kT} + 1} \quad \text{und} \quad f_1 \ll f_0. \quad (9)$$

Für f_1 machen wir den Ansatz

$$f_1 = e^{i\omega t} (\vec{K} \vec{\chi}(K)), \quad (10)$$

wobei $\vec{\chi}(K)$ ein Vektor ist, der nur von der Größe von \vec{K} abhängt: Setzen wir dies in den Ausdruck für $(\partial f / \partial t)_{\text{stoß}}$ ein, so erhalten wir nach Vereinfachung [17]:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{stoß}} = - \frac{f_1}{\tau}; \quad (11)$$

die Relaxationszeit τ ist gegeben durch

$$\frac{1}{\tau} = \Delta = 2vQN, \quad (12)$$

und der „Stoßquerschnitt“ Q definiert durch

$$Q = 2\pi \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^2 \int_0^\pi |V_{\vec{k}\vec{k}'}|^2 \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta, \quad (13)$$

hierin bedeutet Δ die Stoßfrequenz, N ist die Zahl der Masseteilchen pro Volumeneinheit und Θ ist der Winkel zwischen \vec{K} und \vec{K}' . Die Relaxationszeit oder die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen steht mit der mittleren freien Weglänge l durch die Gleichung

$$l = \frac{hK}{m} \tau = \frac{1}{2QN} \quad (14)$$

in Verbindung. Außerdem ergibt sich aus (9) und (10)

$$\frac{h}{m} (\vec{K} \text{ grad } f_0) = - \frac{h}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{kT}{A} (\vec{K} \text{ grad } A) + \frac{\varepsilon}{T} (\vec{K} \text{ grad } T) \right\},$$

$$\text{grad}_{\vec{K}} f_0 = \frac{h^2}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{K},$$

$$\text{grad}_{\vec{K}} f_1 = \left\{ \vec{Z} + \frac{h^2}{m} \left(\vec{K} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \varepsilon} \right) \vec{K} \right\} e^{i\omega t}.$$

Jetzt soll (8) in Gleichung (4) eingesetzt werden. Dabei dürfen wir f_1 im Vergleich zu f_0 im zweiten und dritten Ausdruck für das elektrische Feld vernachlässigen, aber im dritten Ausdruck für das magnetische Feld behalten wir f_1 , da in diesem Falle der Ausdruck, der von f_0 abhängt, verschwindet. So erhalten wir nach einer kleinen Vereinfachung:

$$i\omega (\vec{K} \vec{Z}) e^{i\omega t} - \frac{h}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{kT}{A} (\vec{K} \text{ grad } A) + \frac{\varepsilon}{T} (\vec{K} \text{ grad } T) - e (\vec{K} \vec{E}) \right\} + \frac{e}{mc} (\vec{K} [\vec{H} \vec{Z}]) e^{i\omega t} + \frac{1}{\tau} (\vec{K} \vec{Z}) e^{i\omega t} = 0; \quad (15)$$

hieraus folgt (16):

$$i\omega \vec{Z} - \frac{h}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ e^{-i\omega t} \frac{kT}{A} \text{grad } A + e^{-i\omega t} \frac{\varepsilon}{T} \text{grad } T - e \vec{E}_0 \right\} + \frac{e}{mc} [\vec{H} \vec{Z}] + \frac{1}{\tau} \vec{Z} = 0. \quad (16)$$

Statt dessen können wir schreiben:

$$U \vec{\chi} + \vec{V} + [\vec{W} \vec{\chi}] = 0, \quad (17)$$

wobei gilt:

$$U = 1 + i\omega\tau, \quad (18)$$

$$\vec{V} = \tau \frac{h}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ e \vec{E}_0 - e^{-i\omega t} \frac{k T}{A} \text{grad } A - e^{-i\omega t} \frac{\varepsilon}{T} \text{grad } T \right\}, \quad (19)$$

$$\vec{W} = \tau \frac{e}{m c} H. \quad (20)$$

Wir suchen jetzt eine Lösung für Gleichung (17), dazu multiplizieren wir (17) skalar mit \vec{W} und erhalten

$$U (\vec{W} \vec{\chi}) + (\vec{W} \vec{V}) = 0. \quad (21)$$

Nun multiplizieren wir (17) wieder vektoriell mit \vec{W} und bekommen aus (17) und (21) nach einer kleinen Vereinfachung

$$\vec{\chi} = - \frac{U \vec{V} - [\vec{W} \vec{V}] + \frac{\vec{W}}{U} (\vec{W} \vec{V})}{U^2 + (\vec{W} \vec{W})}. \quad (22)$$

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß das Medium homogen ist und es keinen Temperaturgradienten gibt. Wir setzen also $\text{grad } A$ und $\text{grad } T$ gleich Null und erhalten:

$$\vec{V} = \tau \frac{h}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} e \vec{E}_0 \quad \text{und} \quad \vec{W} = \frac{\tau e}{m c} \vec{H}. \quad (23)$$

Nach der üblichen Methode kann man nun den Ausdruck für den Strom bekommen, der durch die Gleichung gegeben ist:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= 2e \iiint \vec{v} f_1 dK_x dK_y dK_z \\ &= \frac{2eh}{m} \iiint \vec{K} e^{i\omega t} (\vec{K} \vec{\chi}) dK_x dK_y dK_z. \end{aligned} \quad (24)$$

Wegen des Elektronenspins ist der Faktor 2 hinzugefügt. Mit Hilfe von (22), (23) und (18) erhält man aus (24):

$$\vec{J} = K^t \cdot \vec{E} - L^t \cdot [\vec{\omega}_L \vec{E}] + M^t \cdot \vec{\omega}_L (\vec{\omega}_L \vec{E}), \quad (25)$$

wobei K^t , L^t und M^t Tensorcharakter haben¹⁾ und offensichtlich diagonalen Natur sind. Sie sind gegeben durch:

$$K^t = -\frac{2e^2 h^2}{m^2} \iiint \frac{\tau \vec{K} \vec{K} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (1 + i\omega\tau)}{(1 + i\omega\tau)^2 + \tau^2 (\vec{\omega}_L \vec{\omega}_L)} dK_x dK_y dK_z, \quad (26)$$

$$L^t = -\frac{2e^2 h^2}{m^2} \iiint \frac{\tau^2 \vec{K} \vec{K} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}}{(1 + i\omega\tau)^2 + \tau^2 (\vec{\omega}_L \vec{\omega}_L)} dK_x dK_y dK_z, \quad (27)$$

$$M^t = -\frac{2e^2 h^2}{m^2} \iiint \frac{\tau^3 \vec{K} \vec{K} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}}{(1 + i\omega\tau)^2 + \tau^2 (\vec{\omega}_L \vec{\omega}_L)} \frac{dK_x dK_y dK_z}{(1 + i\omega\tau)}, \quad (28)$$

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{m c} \vec{H}, \quad (29)$$

also die doppelte Larmor-Frequenz.

Da nun die Vektormultiplikation eines Vektors \vec{E} mit einem Vektor $\vec{\omega}_L$ ersetzt werden kann durch die skalare Multiplikation von \vec{E} mit dem Tensor $[U^t \vec{\omega}_L]^t$, d. h.

$$[\vec{\omega}_L \vec{E}] = [U^t \vec{\omega}_L]^t \cdot \vec{E}, \quad (30)$$

wobei U^t der Einheitstensor ist, so kann man Gleichung (25) in der üblichen Tensorform schreiben:

$$\vec{J} = S^t \cdot \vec{E}, \quad (31)$$

wobei

$$S^t = K^t \cdot U^t - L^t \cdot [U^t \vec{\omega}_L]^t + M^t \cdot \vec{\omega}_L \vec{\omega}_L. \quad (32)$$

Die Komponente von $[U^t \vec{\omega}_L]^t$ werden durch das Schema²⁾ gegeben:

$$[U^t \vec{\omega}_L]_{\alpha\beta} = \begin{matrix} & \beta = x & y & z \\ \alpha = x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ y & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ z & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{matrix}. \quad (33)$$

¹⁾ Anmerkung: $\vec{A}\vec{B}$, $(\vec{A}\vec{B})$ und $[\vec{A}\vec{B}]$ ist die Darstellung für dyadisches bzw. skalares und vektorielles Produkt der beiden Vektoren \vec{A} und \vec{B} . Der erhöhte Index „t“ bezeichnet den Tensor; $A^t \cdot \vec{B}$ und $A^t \cdot B^t$ sind das skalare Produkt eines Tensors und eines Vektors, bzw. von zwei Tensoren. Genauer findet man bei I. W. Gibbs, Vektoranalysis (in Bd. 2 der gesammelten Werke); ebenso bei D. R. Hartree, Proc. Camb. phil. soc. **27**, 144, 1931. — ²⁾ ω_x , ω_y , ω_z dürfen nicht mit der Winkelgeschwindigkeit ω verwechselt werden. Sie entsprechen den Komponenten der doppelten Larmor-Frequenz und sind also dem Magnetfeld proportional. Die Resultierende aus ihren Komponenten werden wir mit ω_L bezeichnen, also ist $\omega_L^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$ zu setzen, um die Verwechslung mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu vermeiden.

Die anderen Tensormultiplikationen in Gleichung (32) werden bequem in der gleichen Art ausgeführt. Die Komponenten des Stromes in (31) ergeben sich dann:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum_{K=x,y,z} S_{xK} E_K, \\ J_y &= \sum_{K=x,y,z} S_{yK} E_K, \\ J_z &= \sum_{K=x,y,z} S_{zK} E_K. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Da wir soweit jetzt den Tensor S^t bestimmt haben, der den elektrischen Strom mit dem Feld in Beziehung setzt, können wir jetzt bequem die Ausdrücke für Dispersion, Absorption und Polarisierung mit Hilfe der Maxwell'schen Elektrodynamik ableiten. Wir gebrauchen nämlich für die Wellengleichungen das übliche System:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \text{ usw.}, \quad (35)$$

wobei \vec{D} der Verschiebungsvektor ist, der durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\vec{D} = \epsilon^t \cdot \vec{E} = \left(U^t + \frac{4\pi \vec{P}}{\vec{E}} \right) \cdot \vec{E}. \quad (36)$$

ϵ^t ist der Dielektrizitätstensor, und die Polarisation \vec{P} ist gegeben durch

$$\vec{J} = \frac{d\vec{P}}{dt} = i\omega \vec{P}. \quad (37)$$

Da \vec{E} , \vec{H} und \vec{D} proportional sind zu $e^{i\omega(t - \frac{n}{c}(\vec{r} \cdot \vec{s}))}$, wobei \vec{s} der Einheitsvektor in der Richtung der Wellennormalen und n der Brechungsindex ist, bedeuten die Rechenzeichen $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$ usw. einfach Multiplikation mit $i\omega$ bzw. $-i\omega \frac{n}{c} s_x$ usw. Also werden die Maxwell'schen Gleichungen (35) zu:

$$n[\vec{H} \vec{s}] = \vec{D} \quad \text{und} \quad n[\vec{E} \vec{s}] = -\vec{H}, \quad (38)$$

oder durch Elimination von \vec{H} aus diesen Gleichungen bekommen wir

$$\vec{D} = (n^2 U^t - \vec{n} \vec{n}) \vec{E}. \quad (39)$$

Bei dem Vergleich von (39) und (36) erhalten wir

$$(\epsilon^t - n^2 U^t + \vec{n} \vec{n}) \vec{E} = 0, \quad (40)$$

wobei man ε^t aus (36) mit Hilfe von (37), (31) und (32) folgendermaßen erhält:

$$\varepsilon^t = U^t + \delta, \quad (41)$$

dabei ist

$$\delta = \frac{4\pi}{i\omega} S^t, \quad (42)$$

$$= K' \cdot U^t - L' \cdot [U^t \vec{\omega}_L] + M' \cdot \vec{\omega}_L \vec{\omega}_L, \quad (43)$$

$$K' = \frac{4\pi}{i\omega} K^t, \quad L' = \frac{4\pi}{i\omega} L^t, \quad M' = \frac{4\pi}{i\omega} M^t. \quad (44)$$

Wenn wir nun endlich E_x , E_y und E_z aus der Gleichung (40) eliminieren, erhalten wir eine Determinante mit den Komponenten des Tensors $\varepsilon^t - n^2 U^t + \vec{n} \vec{n}$ als Elementen zur Auswertung des Brechungsindex mit offensichtlich komplexem Charakter, dessen reeller Teil die Dispersion und dessen imaginärer Teil die Absorption angibt. Die Gleichung (40) enthält dann das Verhältnis $E_x : E_y : E_z$, d. h. die Art der Polarisierung für die korrespondierende Welle im Medium.

2. Das Ionosphärenproblem.

A. Darstellung der Grundformeln für Brechungsindex und Polarisierung.

Wir wollen jetzt diese Überlegung anwenden, um Dispersion, Absorption und Polarisierung von Radiowellen zu bestimmen, die die Ionosphäre durchlaufen. Wir werden hierbei eine elektromagnetische Ebenewelle betrachten, die sich in Richtung der Z-Achse fortpflanzt. In diesem Falle ist das konstante Magnetfeld das Erdfeld, das wir in zwei Komponenten zerlegen: H_z in Richtung der Z-Achse, H_x dazu senkrecht. Wir werden nur den normalen Einfall behandeln und deshalb setzen $\vec{n} = (0, 0, \mu)$. Mit Hilfe der Gleichungen (41), (43) und (33) wird die Determinante aus den Komponenten von $\varepsilon^t - n^2 U^t + \vec{n} \vec{n}$ für die Auswertung von μ^2 gefunden:

$$\begin{vmatrix} 1 - \mu^2 + K'_0 + M'_0 \omega_x^2 & L'_0 \omega_z & M'_0 \omega_x \omega_z \\ -L'_0 \omega_z & 1 - \mu^2 + K'_0 & L'_0 \omega_x \\ M'_0 \omega_x \omega_z & -L'_0 \omega_x & 1 + K'_0 + M'_0 \omega_z^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (45)$$

Nach Ausrechnung und Vereinfachung erhalten wir folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung von $1 - \mu^2$:

$$a(1 - \mu^2)^2 + b(1 - \mu^2) + c = 0, \quad (46)$$

wobei

$$a = 1 + K'_0 + M'_0 \omega_z^2, \quad (47)$$

$$b = \omega_x^2 (M'_0 K'_0 + L_0'^2 + M'_0) + 2 K'_0 M'_0 \omega_z^2 + 2 K_0'^2 + 2 K'_0 \quad (48)$$

und

$$c = K_0'^3 + K_0'^2 (1 + M'_0 \omega_L^2) + K'_0 (L_0'^2 \omega_L^2 + M'_0 \omega_x^2) + L_0'^2 M'_0 \omega_L^4 + L_0'^2 \omega_z^2. \quad (49)$$

Es ist hier hervorzuheben, daß in Gleichung (45) nur die Diagonalelemente des Integraltensors K' , L' und M' auftreten, und da die Diagonalelemente gleich sind, haben wir sie einfach mit K'_0 , L'_0 und M'_0 bezeichnet. Sie sind gegeben durch:

$$K'_0 = \frac{4\pi}{i\omega} \frac{1}{3} K^t, \quad L'_0 = \frac{4\pi}{i\omega} \frac{1}{3} L^t, \quad M'_0 = \frac{4\pi}{i\omega} \frac{1}{3} M^t. \quad (50)$$

Nach Auflösung von Gleichung (46) erhalten wir endlich nach einigen Vereinfachungen und Umordnungen

$$1 - \mu_{\text{komplex}}^2 = \frac{-\left[\frac{\omega_x^2}{2} G_1 + K'_0 (1 + K'_0 + M'_0 \omega_z^2)\right] \pm \sqrt{\frac{\omega_x^4}{4} G_2^2 - L_0'^2 \omega_z^2 (1 + K'_0 + M'_0 \omega_L^2)^2}}{1 + K'_0 + M'_0 \omega_z^2}, \quad (51)$$

wobei

$$G_1 = L_0'^2 + M'_0 K'_0 + M'_0, \quad G_2 = L_0'^2 - M'_0 K'_0 - M'_0. \quad (52)$$

Der komplexe Brechungsindex μ ist gegeben durch

$$\mu_{\text{komplex}} = \mu - i\alpha, \quad (53)$$

wobei μ der Brechungsindex ist, der die Dispersion bestimmt, und α der Extinktionskoeffizient, der mit dem Absorptionskoeffizienten, d. h. mit der absorbierten Energie pro Einheit der Dicke, dividiert durch die einfallende Energie, durch die Gleichung zusammenhängt:

$$\alpha = \frac{2\alpha\omega}{c}. \quad (54)$$

Um die Polarisation der Welle zu untersuchen, mußten wir das Verhältnis der elektrischen oder magnetischen Vektoren untersuchen. Eine Diskussion der Gleichung (38) zeigt, daß $H_z^0 = 0$ ist, und daß deshalb die magnetischen Vektoren nur in der x - y -Ebene, senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, liegen. Außerdem erhalten wir aus Gleichung (38):

$$\frac{E_x}{E_y} = -\frac{H_y^0}{H_x^0}, \quad (55)$$

wobei H_x^0, H_y^0, H_z^0 die Komponenten des Magnetfeldes der Welle sind. Aus Gleichung (40) und (55) ergibt sich deshalb

$$-\frac{H_y^0}{H_x^0} = \frac{M'_0 \omega_z (1 - \mu^2 + K'_0) - L'_0 \omega_z}{1 - \mu^2 + K'_0 + M'_0 \omega_L^2}, \quad (56)$$

wodurch die Polarisation der Welle bestimmt wird.

Die Formeln (51) und (56) sind exakt und stellen die fundamentalen quantenmechanischen Formeln dar für die Untersuchung des Phänomens der Dispersion, Absorption und Polarisation der Radiowellen, die sich durch die Ionosphäre fortpflanzen. Die Werte für die Integrale K'_0, L'_0 und M'_0 ergeben sich aus den Gleichungen (50), (26), (27) und (28).

B. Auswertung der Integrale und Formeln für Dispersion, Absorption und Polarisation.

Wenn wir die Energie als neue Variable einführen, reduzieren sich die Integrale K'_0, L'_0 und M'_0 zu:

$$K'_0 = \frac{64 \pi^2 (2m)^{1/2} e^2}{3 \omega^2 h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} \left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}}{\left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)^2 - y^2} d\varepsilon, \quad (57)$$

$$L'_0 = \frac{64 \pi^2 (2m)^{1/2} e^2}{3 \omega^3 h^3} i \int_0^\infty \frac{-\varepsilon^{3/2} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}}{\left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)^2 - y^2} d\varepsilon, \quad (58)$$

$$M'_0 = \frac{64 \pi^2 (2m)^{1/2} e^2}{3 \omega^4 h^3} \int_0^\infty \frac{-\varepsilon^{3/2} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}}{\left|\left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)^2 - y^2\right| \left|1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right|} d\varepsilon, \quad (59)$$

wobei wir

$$\Delta = \frac{1}{\tau} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_L}{\omega} = y \quad (60)$$

gesetzt haben.

Leider ist eine allgemeine Ausrechnung der Integrale nicht möglich. Sie sind dazu sehr kompliziert, weil der Ausdruck $\Delta(\varepsilon)$ auftritt, der eine verwickelte Funktion der Energie ist. In der vorliegenden Untersuchung

werden wir uns deshalb nur mit den folgenden beiden einfachen Fällen beschäftigen:

1. Wir werden keine Hypothese über die Natur der zusammenstoßenden Teilchen aufstellen, also keine Annahme über den Stoßvorgang zwischen Elektronen und Masseteilchen machen. Wir werden einfach voraussetzen, daß in irgendeiner Weise ein Mittelwert für $\Delta(\varepsilon)$ gefunden ist, und diesen durch das ganze Gebiet der Integration konstant halten.

2. Wir betrachten ein Ionosphärenmodell, dessen Teilchen als ionisiert vorausgesetzt werden, so daß der Zusammenstoß zwischen Elektronen und Ionen stattfindet¹⁾.

Dabei wollen wir in beiden Fällen voraussetzen, daß das Elektronengas wegen seiner geringen Konzentration der unveränderten Maxwell'schen Statistik gehorcht. Die Verteilungsfunktion f_0 ist dann gegeben durch

$$f_0 = A e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \quad (61)$$

was offensichtlich richtig ist, solange

$$A = \frac{n h^3}{2 (2 \pi m k T)^{3/2}} \ll 1. \quad (62)$$

C. Diskussion dieser Spezialfälle.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die beiden Spezialfälle getrennt zu diskutieren.

1. $\Delta = \text{Stoßfrequenz} = \text{konstant}$. Die Werte für die Integrale sind gegeben durch

$$K'_0 = -x_0 \frac{1 - \frac{i\Delta}{\omega}}{\left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)^2 - y^2}, \quad (63)$$

$$L'_0 = -\frac{iK'_0}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{i\Delta}{\omega}}, \quad (64)$$

$$M'_0 = -\frac{K'_0}{\omega^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)^2}, \quad (65)$$

¹⁾ Die Untersuchungsergebnisse für Zusammenstöße zwischen Elektronen und neutralen Atomen und Elektronen und Molekülen werden in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden. Wenn die Temperatur verhältnismäßig niedrig ist, ist die Energie des Elektrons auch klein, und die Berechnung wird dann sehr viel komplizierter wegen des Auftretens von Ramsauer- und ähnlichen Effekten.

wobei

$$x_0 = \frac{4 \pi n e^2}{m \omega^2}. \quad (66)$$

Diese Werte setzen wir in die Formeln (51) und (56) ein und erhalten nach Vereinfachung:

$$1 - (\mu - i\kappa)^2 = \frac{x_0}{\left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right) - \frac{y_T^2}{2\left(1 - x_0 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)} \mp \frac{1}{2\left(1 - x_0 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)} \sqrt{\left\{y_T^4 + 4y_L^2\left(1 - x_0 - \frac{i\Delta}{\omega}\right)^2\right\}}} \quad (67)$$

und

$$\frac{H_y^0}{H_x^0} = \frac{i y_L (1 - \mu^2)}{\left(1 - \frac{i\Delta}{\omega}\right) (1 - \mu^2) - x_0}, \quad (68)$$

wobei

$$y_T = \frac{e H_T}{m c \omega} \quad \text{und} \quad y_L = \frac{e H_L}{m c \omega};$$

H_L und H_T sind die Komponenten des Magnetfeldes parallel und senkrecht zu der Fortpflanzungsrichtung der Wellen.

Bei dieser Näherungsrechnung gehen unsere Grundformeln (51) und (56) über in die bekannten Ausdrücke für Dispersion, Absorption und Polarisation, die zuerst von Appleton, Hartree und Goldstein¹⁾ abgeleitet wurden und von grundlegender Bedeutung für alle Arbeiten über das Ionosphärenproblem geworden sind.

Um in Gleichung (67) reellen und imaginären Teil zu trennen, beschränken wir uns auf einen speziellen, häufig vorkommenden Fall, nämlich

$$\frac{\Delta^2}{\omega^2} \ll 1, \quad (69)$$

d. h. die Stoßfrequenz der Elektronen mit Ionen ist viel geringer als die der einfallenden Welle, und

$$(1 - x_0)^2 \gg \frac{\Delta^2}{\omega^2}, \quad (70)$$

so daß wir aus (67) erhalten

$$1 - \mu^2 + \kappa^2 = \frac{x_0}{1 - \frac{y_T^2}{2(1 - x_0)} \mp \frac{1}{2(1 - x_0)} \sqrt{\{y_T^4 + 4y_L^2(1 - x_0)^2\}}} \quad (71)$$

¹⁾ Die von den verschiedenen Autoren benutzte Literatur ist gemeinsam mit der unsrigen im Anhang angegeben.

und

$$z^2 = \frac{(1 - \mu^2)^2}{2\mu} \cdot \frac{\Delta}{\omega x_0} \left[1 + \frac{y_T^2}{2(1 - x_0)^2} \pm \frac{y_T^4}{2(1 - x_0)^2 \sqrt{y_T^4 + 4y_L^2(1 - x_0)^2}} \right]. \quad (72)$$

Es ist darauf hinzuweisen, daß die speziellen Gleichungen (71) und (72) nur gelten, wenn die sogenannte Kreisfrequenz eH/mc , die der Elektronenbewegung durch das äußere Magnetfeld aufgedrückt wird, wesentlich kleiner oder größer als die Frequenz der einfallenden Welle ist, also wenn $y \ll 1$ oder $y \gg 1$. In dem speziellen Fall $y \sim 1$ muß der Ausdruck von der Ordnung Δ^2/ω^2 , den wir in der obigen Ableitung vernachlässigt haben, beibehalten werden, um Singularitäten in der Gleichung zu vermeiden.

2. *Ionosphäre aus Elektronen und Ionen.* Im Falle des Ionosphärenmodells, wenn also die Zusammenstöße zwischen Elektronen und Ionen stattfinden, wollen wir voraussetzen, daß das zwischen ihnen wirkende Feld Coulombschen Typus hat. Zur Vereinfachung wird die Beeinflussung des betrachteten Elektrons durch die anderen Elektronen und Ionen vernachlässigt, ausgenommen soweit eine sogenannte „Abschirmungskonstante“ eingeführt werden soll, die für die Ausdehnung des Ions maßgebend ist. Wir schreiben also für $V(r)$:

$$V(r) = \frac{ze^2}{r} e^{-rb}, \quad (73)$$

wobei z die Zahl der Elektronen pro Masseteilchen und b die Abschirmungskonstante ist.

Wenn wir diese Werte in Gleichung (7) einsetzen, erhalten wir das Matrixelement

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \frac{4\pi ze^2}{b^2 + \left(4\pi K \sin \frac{\Theta}{2}\right)^2}, \quad (74)$$

woraus wir mit Gleichung (13) den Stoßquerschnitt bestimmen:

$$Q = \pi \cdot \frac{z^2 e^4}{4\epsilon^2} l, \quad (75)$$

und also aus (12) die Stoßfrequenz

$$\Delta = \frac{\pi z^2 e^4 N^+ l}{(2m)^{1/2} \epsilon^{3/2}}, \quad (76)$$

Hierin bedeutet N^+ die Zahl der Ionen pro Volumeneinheit, und T ist gegeben durch die Gleichung

$$I = \log(t+1) - \frac{t}{t+1}, \quad (77)$$

wobei

$$t = 6,63 \cdot 10^{27} \varepsilon b^2 = \alpha \cdot \varepsilon, \quad (78)$$

$$\alpha = 6,63 \cdot 10^{27} b^2. \quad (79)$$

Sogar in diesem einfachen Falle ist die allgemeine Auswertung der Integrale sehr kompliziert, und wir werden uns deshalb auf einen Grenzfall von allgemeiner praktischer Bedeutung beschränken, nämlich $\frac{\Delta}{\omega} \ll 1$. Die Werte der Integrale sind dann:

$$K'_0 = -x \left(1 + \frac{i \Delta_0}{\omega} \frac{1+y^2}{1-y^2} \right), \quad (80)$$

$$L'_0 = \frac{i x}{\omega} \left(1 + \frac{2 i \Delta_0}{\omega} \frac{1}{1-y^2} \right), \quad (81)$$

$$M'_0 = \frac{x}{\omega^2} \left(1 + \frac{i \Delta_0}{\omega} \frac{3-y^2}{1-y^2} \right), \quad (82)$$

wobei

$$x = \frac{x_0}{1-y^2} \quad (83)$$

und

$$\Delta_0 = \frac{4 \pi}{3} \frac{z^2 e^4 N^+}{(2 \pi m k)^{1/2}} \frac{1}{T^{3/2}} \cdot \frac{B}{k T} \quad (84)$$

$$= 1,8 \frac{z^2 N^+}{T^{3/2}} \cdot \frac{B}{k T}, \quad (85)$$

$$B = -e^{k T \alpha} \frac{1+k T \alpha}{\alpha} E i \left(-\frac{1}{k T \alpha} \right) - k T; \quad (86)$$

dabei bedeutet:

$$-E i(-\beta) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, \quad (87)$$

$$\beta = \frac{1}{k T \alpha}. \quad (88)$$

Die Funktion (87) ist in Jahnke-Emdens Funktionstabeln, S. 19—23, 1909, enthalten und hat folgende Grenzwerte:

$$-Ei(-\beta) = \log \frac{1}{\beta} - C + \beta - \frac{1}{4}\beta^2 + \dots \text{ für kleine } \beta \quad (89)$$

und

$$-Ei(-\beta) = e^{-\beta} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} + 2 \frac{1}{\beta^3} - \dots \right) \text{ für große } \beta, \quad (90)$$

wobei C = Eulersche Konstante = 0,577.

Wenn wir nun die Werte von K'_0 , L'_0 und M'_0 aus Gleichung (80), (81) und (82) in die Grundformeln (51) und (56) einsetzen, erhalten wir nach kleinen algebraischen Vereinfachungen

$$1 - \mu^2 + \kappa^2 = \frac{x_0}{1 - y_L^2 - \frac{y_T^2}{1 - x_0}} \left\{ 1 - \frac{y_T^2}{2(1 - x_0)} \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2(1 - x_0)} \sqrt{y_T^4 + 4y_L^2(1 - x_0)^2} \right\}. \quad (91)$$

und

$$\frac{H_y^0}{H_x^0} = \frac{i y_L (1 - \mu^2)}{(1 - \mu^2) \left(1 - \frac{i A_0}{\omega} \right) - x_0}, \quad (92)$$

also dieselben Ausdrücke wie vorher, die für jeden Wert von y , ausgenommen $y \sim 1$, gelten.

Da die allgemeine Auswertung des Absorptionskoeffizienten für jeden Wert von y kompliziert ist, werden wir das Ergebnis nur für $y \ll 1$ angeben, wenn also die magnetische Kreisfrequenz eH/mc viel kleiner ist als $\omega/2\pi$, die Frequenz der einfallenden Welle. Dies ist ein Fall, an dem wir bei ionosphärischen Arbeiten besonders interessiert sind. Wir erhalten:

$$\kappa \mu = \frac{A_0 x_0}{2\omega} \left\{ 1 + \frac{3y_T^2 - 2x_0 y_T^2}{2(1 - x_0)^2} \pm \frac{8y_L^2(1 - x_0)^3 + 3y_T^4 - 2x_0 y_T^4}{2(1 - x_0)^2 \sqrt{y_T^4 + 4y_L^2(1 - x_0)^2}} \right\}. \quad (93)$$

Wie leicht nachgewiesen werden kann, stimmt dies mit Gleichung (72) überein, wenn A dabei ersetzt wird durch A_0 , seinem aus Gleichung (85) berechneten Wert, der hier als Mittelwert von A gelten kann. Die Bedeutung davon kann man aus folgenden Überlegungen anschaulich einsehen:

Die Stoßfrequenz A ist definiert als die Stoßzahl pro Sekunde und gegeben durch die Gleichung:

$$A = \pi \sigma^2 \bar{v} N^+, \quad (94)$$

wobei σ der Radius des Stoßquerschnitts ist. Im Falle des Coulombschen Potentialfeldes können wir angenähert schreiben:

$$\sigma \sim \frac{z e^2}{\bar{\epsilon}}, \quad (95)$$

da im Mittel

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \sim k T \quad (96)$$

ist, erhalten wir

$$A \sim \frac{\pi z^2 e^4 N^+}{\epsilon^{3/2} m^{1/2}} \sim \frac{\pi z^2 e^4 N^+}{m^{1/2} (k T)^{3/2}}. \quad (97)$$

Dieser Wert stimmt mit (84) überein, ausgenommen, wenn die vorher eingeführte Trivialkonstante $\beta = \frac{1}{k T \alpha}$ klein ist.

3. *Physikalische Ergebnisse.* Wir stellen also fest, daß wir aus der Messung des Reflexionskoeffizienten von Radiowellen tatsächlich den Wert von A_0 in Gleichung (93) erhalten und damit die Kenntnis über Zusammensetzung und Temperaturen in der oberen Atmosphäre. Wenn wir z. B. voraussetzen, daß das Ionosphärenmodell aus der gleichen Anzahl von Elektronen und Ionen pro Kubikzentimeter besteht, d. h. $n = N^+ = 10^6$ bzw. 10^5 pro Kubikzentimeter in der F - und E -Schicht bei Temperaturen von $T \sim 10^3$ und $3 \cdot 10^2$ abs. [18] ist, also bei einer für diese Schichten sehr einleuchtenden Schätzung, erhalten wir aus Gleichung (85), (86) und (89), da $\beta = \frac{1}{k T \alpha}$ klein ist,

$$A_0 = 1,8 \frac{z^2 N^+}{T^{3/2}} [\log(k T \alpha) - C - 1], \quad (98)$$

d. h.

$$\begin{aligned} A_0 \sim & 10^3 \text{ Stöße/sec in der } F\text{-Schicht, } \{ \\ & \sim 8 \cdot 10^2 \text{ Stöße/sec in der } E\text{-Schicht. } \} \end{aligned} \quad (99)$$

Für b haben wir den Wert $\bar{a}/2^1$) vorausgesetzt, wobei \bar{a} den mittleren Abstand der Ionen bedeutet. Außerdem setzen wir $z = 1$, d. h. die Teilchen

¹⁾ Hierbei liegt natürlich eine geringe Ungewißheit in der Bestimmung von b , der sogenannten „Abschirmungskonstanten“. Im Prinzip könnte das Matrixelement $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ und damit b genauer dadurch bestimmt werden, daß man entweder ein Fermi-Jensen- oder Hartree-Potentialfeld benutzt, aber da wir bei dem vorliegenden Problem nur an der Größenordnung interessiert sind, ist der Schätzwert von b , durch obere Grenze $b = \bar{a}/2$ gegeben, eine gute Annäherung.

sind einfach ionisiert. Nun sind nach Beobachtungen von Eckersley [19] und Farmor und Ratcliffe [20] in der *F*-Schicht bei Messungen des Reflexionskoeffizienten von Radiowellen aus dieser Schicht die Durchschnittswerte für A_0 $3,6 \cdot 10^3$ bzw. $1,6 \cdot 10^3$ Stöße pro Sekunde, während Bailey und Martyn [21] bei der Untersuchung des Phänomens der „Übersprechung“ als Wirkung von Radiowellen für A_0 in der *E*-Schicht einen Wert von $2 \cdot 10^5$ Stößen pro Sekunde erhielten. Ein Vergleich dieser Beobachtungsdaten mit den in Gleichung (99) berechneten zeigt überzeugend, daß unser Ionosphärenmodell die Bedingungen der wirklichen Ionosphäre wiedergibt, wenn wir voraussetzen, daß die Elektronenzahl in der *F*-Schicht, wie durch Radiowellenmessung gezeigt wurde, gleich der Zahl der Ionen im Kubikzentimeter ist, und diese in der *E*-Schicht um den Faktor $3 \cdot 10^2$ größer ist. Wir stellen also fest, daß Elektronen und Ionen der Hauptanlaß für Dispersion und Absorption von Radiowellen in der *E*- und *F*-Schicht sind, daß die Dispersion direkt durch die Elektronen, die Absorption dagegen durch ihr Zusammenwirken mit Ionen in einem wie in Gleichung (73) vorausgesetzten Feld entsteht. Klassisch gesprochen erzeugen die durch den elektrischen Vektor entstehenden elektrischen Ströme Wärme, deren Energie der Energie der absorbierten einfallenden Strahlung entnommen wird: die gewonnene Wärmenergie wird durch den Stoßprozeß an die benachbarten Teilchen abgegeben. Wenn man nun den beobachteten Wert 10^6 für die Elektronendichte in der *F*-Schicht mit der entsprechenden Molekulardichte [22] vergleicht, erscheint es wahrscheinlich, daß die Teilchen an den äußeren Grenzen der Ionosphäre praktisch alle ionisiert sind. Man kann auch deshalb sicher annehmen, daß die Erscheinung des Verschwindens der Elektronen sich durch die Wiedervereinigung mit positiven Ionen zu neutralen Teilchen erklärt. Ein entsprechender Vergleich der beobachteten Elektronendichte von 10^5 mit den korrespondierenden Molekulardichten [22] in der *E*-Schicht zeigt das Vorhandensein einer großen Anzahl neutraler Teilchen in dieser Schicht. Die Verminderung der Elektronenzahl um einen Faktor $3 \cdot 10^2$ pro cm^3 ist dadurch begründet, daß sie an neutrale Teilchen gebunden sind und so negative Ionen bilden, wodurch die Zahl der positiven Ionen die der Elektronen übertrifft. Der Wiedervereinigungsprozeß ist kompliziert und findet vielleicht zwischen positiven und negativen Ionen statt. Die hohe Iondichte von der Größenordnung 10^7 , die in der vorliegenden Arbeit nach Untersuchung des Reflexionskoeffizienten gefordert wurde, ist auch notwendig, um die Werte für die elektrische Leitfähigkeit, die nach Beobachtungen von drahtlosen Sendungen geschätzt wurden, mit denen ver-

einigen können, die man aus den Daten für den Erdmagnetismus schätzen konnte [23].

Diskussion.

Wir wollen nun die verschiedenen Behauptungen einer kritischen Betrachtung unterziehen, die wir im Laufe der oben wiedergegebenen mathematischen Überlegung aufgestellt haben, um die bekannten Formeln für Dispersion und Absorption zu erhalten, die so außerordentlich bedeutungsvoll für Ionosphärenarbeiten sind. Zuerst ist festzustellen, daß wir während der ganzen Abhandlung die Polarisation oder den sogenannten Lorentz-Term vernachlässigt haben. Dieser Punkt bietet einige Schwierigkeiten und ist von verschiedenen Autoren behandelt worden. Darwin [24] hat indessen vor kurzem diese Fragen sehr kritisch behandelt und seiner Meinung dahin Ausdruck gegeben, daß in einem ionisierten Medium, besonders unter Bedingungen wie bei der Ionosphäre, der Polarisationsterm nicht vorkommen kann¹⁾. Wir haben weiter vorausgesetzt, daß das Medium homogen ist, und daß es keinen Temperaturgradienten gibt. Dies ist ein Idealfall: Dichte und Temperatur verändern sich mit der Höhe in der wirklichen Ionosphäre. Also gelten die Formeln, die in dieser Arbeit entwickelt worden sind, nur für einen Bereich der Ionosphäre, in dem Dichte und Temperatur konstant bleiben. Die Betrachtung des ganz allgemeinen Falles, daß Dichte und Temperatur sich mit der Höhe ändern, d. h. grad A und grad T in Gleichung (19) nicht mehr verschwinden, ist in Vorbereitung und wird in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden. Wir halten weiter fest, daß hier drei bedeutende Faktoren hervortreten, nämlich A , die sogenannte Stoßfrequenz, $\omega/2\pi$, die Frequenz der einfallenden Welle, und ω_L die doppelte Larmor-Frequenz, deren relative Größen tatsächlich das Verhalten des Ionosphärenproblems bedingen; der Faktor A ist nach Gleichung (62) proportional zu $n/T^{3/2}$ bestimmt, sozusagen, ob das betrachtete Elektronengas der Maxwell'schen oder der Fermi'schen Statistik gehorcht und ist in der vorliegenden Arbeit offensichtlich kleiner als eins. Dies kann man leicht nachweisen dadurch, daß man die angenäherten Werte der Konstanten in Gleichung (62) ersetzt.

Wir kommen nun zu der Diskussion über die Wirkung des Magnetfeldes auf die Elektronenbewegung in der Ionosphäre. Bei der Ableitung der

¹⁾ In der nächsten „Transaction of Bose Research Institute Calcutta“ wird die allgemeine Formel für Dispersion und Absorption gegeben, die den Polarisationsterm in Betracht zieht, und ihre Folgerungen werden durch einen Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen für die Ionosphäre diskutiert.

üblichen Formeln (67) und (68) für Brechungsindex und Polarisation aus den allgemeinen exakten Gleichungen (51) und (56) ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß das Energiespektrum des Elektrons im Magnetfeld kontinuierlich und nicht diskret ist, wie es tatsächlich sein sollte. Denn infolge der Lorentz-Kraft bewegt sich das Elektron unter der Wirkung des Magnetfeldes längs einer Achse auf einem zum Feld senkrechten Kreis mit der Frequenz ω_L und verhält sich also genau wie ein zweidimensionaler Oszillator, da es rechtwinklig oszilliert, und die Energie eines Oszillators kann in der neueren Quantenmechanik nur eine Reihe von diskreten Werten haben, die durch die Gleichung gegeben sind:

$$E_l = 2 \mu H (l + \frac{1}{2}), \quad (100)$$

wobei l eine positive Zahl ist und μ , das Bohrsche Magneton, $= \frac{e h}{2 m c}$
 $= 9,2 \cdot 10^{-21}$ erg/Gauß.

Die Bedeutung dieser Quantelung durch das Magnetfeld ist schon diskutiert worden von Landau [25], Teller [26] und Peierls [27] bei einer Erklärung des Diamagnetismus in Metallen und von Titeica [28] und Sommerfeld und Bartlett [29] sowohl bei Arbeiten über die Änderung der metallischen Leitfähigkeit im longitudinalen Magnetfeld als auch (Titeica) bei der Ableitung der linearen Beziehung zu dem Feld, wenn dies sehr stark ist und transversal wirkt. Der Einfluß der Quantelung auf die Ionosphärentheorie ist jedoch hinsichtlich der Stoßwirkung der Elektronen mit den Ionen zu erkennen. Unter den praktisch vorkommenden Bedingungen werden die Elektronen im allgemeinen nicht vollständige Kreise um das Magnetfeld als Achse beschreiben. Sie werden hieran dauernd durch die Zusammenstöße mit den Ionen gehindert. Und nur wenn τ , die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen, viel größer ist als die Periode T , die der Larmor-Frequenz ω_L entspricht, welche sich aus den Schwingungen des Elektrons im Magnetfeld der Erde ergibt, oder, was dasselbe bedeutet, wenn die mittlere freie Weglänge des Elektrons größer ist als der Krümmungsradius $r = m c v / e H$ des im Erdfeld beschriebenen Kreises, wird das Elektron den vollen Kreis durchlaufen, ehe der Zusammenstoß stattfindet — dagegen wird das Elektron im umgekehrten Falle, wenn die Stoßperiode τ viel kleiner ist als die Larmor-Periode T oder, gleichbedeutend, wenn die mittlere freie Weglänge l viel kleiner ist als der Krümmungsradius r , nur einen Teil des Umlaufs zwischen zwei Zusammen-

stößen beschreiben. Wir finden also, daß es ein kritisches Magnetfeld gibt, das gegeben ist durch die Bedingung:

$$H_0 = A \cdot \frac{mc}{e} = A \cdot 5,6 \cdot 10^{-8} \text{ Gauß}, \quad (101)$$

und wenn das betrachtete Magnetfeld groß ist im Vergleich mit dem kritischen Feld H_0 , kann das Elektron zwischen den Zusammenstößen spiralförmige Bahnen um die Kraftlinien durchlaufen. Die Energiezustände des Elektrons sind nicht mehr kontinuierlich, sondern diskret und beinahe scharf bestimmt. (Der Unschärferelation entsprechend wird das Energiespektrum aus einer Reihe von Linien mit Breiten von $\sim h/\tau$ bestehen. Diese Wirkung der Zusammenstöße wird nur herauskommen, wenn das betrachtete Feld von der Ordnung $kTmc/he$ ist.) Auch der Absorptionsvorgang wird dann etwas anders verlaufen. Das Elektron wird bei dem Übergang zwischen zwei gequantelten Zuständen Energie absorbieren, und, wenn man das Matrixelement der gestörten Energie $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ in Gleichung (7) in Betracht zieht, wird die Eigenfunktion des Elektrons die eines Oszillators statt einer ebenen Welle, wie vorausgesetzt wurde. Nun ist die mittlere Größe von A_0 in der E - und F -Schicht, wie oben erwähnt, von der Größenordnung 10^5 bzw. 10^3 Stöße pro Sekunde (cm^{-1}). Wir erhalten also:

$$H_0 \sim 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ Gauß in der } E\text{-Schicht,}$$

$$\sim 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ Gauß in der } F\text{-Schicht.}$$

Obwohl das magnetische Erdfeld sehr schwach ist ($\sim 0,4$ Gauß, wie Appleton feststellte), ist es doch weit größer als der kritische Wert H_0 , und die Elektronen können sich also spiralförmig um die Magnetfeldrichtung als Achse bewegen. Die Existenz dieser spiralförmigen Bewegung wird durch die Tatsache bestätigt, daß die Dispersionskurven ober- und unterhalb einer kritischen Stoßfrequenz $A_c = \frac{H_0}{5,6} \cdot 10^8$ eine beträchtliche Veränderung zeigen. Da aber bei Ionosphärenbedingungen die magnetische Energie μH viel kleiner ist als die Anfangsenergie des Elektrons kT , kann der Quantelungseffekt keine wesentlichen Änderungen bewirken¹⁾. Wir wollen z. B.

¹⁾ Es ist interessant, festzustellen, daß bei der Betrachtung eines Metalls H_0 von $\sim 10^6$ Gauß (wenn A aus dem bei 0°C gemessenen Wert der Leitfähigkeit bestimmt wurde) ein genügend großer Wert ist, bei dem $\mu H > kT$ wird. Also beginnt zuerst in der Nähe dieser kritischen Feldstärke, wie besonders Kapitza beobachtete, die Änderung der Leitfähigkeit mit der betrachteten magnetischen Feldstärke, von einem quadratischen zu einem linearen Gesetz überzugehen.

eine qualitative Abschätzung des Fehlers vornehmen, der in Formel (67) für den komplexen Brechungsindex durch den Quantelungseffekt bei der Elektronenbewegung im Magnetfeld bewirkt würde. Bei der oben benutzten statistischen Methode, besonders bei der Auswertung der Integrale K'_0 , L'_0 und M'_0 aus den Gleichungen (50), (26), (27) und (28) haben wir die Tatsache vernachlässigt, daß das Eigenwertspektrum des Elektrons im Magnetfeld diskret ist, wenn seine Bahn eine geschlossene Kurve ist. Dies ist ein rein quantenmechanischer Effekt, und der Korrektionsausdruck, der bei der Formel (67) deshalb hinzugefügt werden muß, wird eine Funktion von $\mu H/kT$ sein, und zwar, wie eine kurze Überlegung zeigt, bei dem Ionosphärenproblem offensichtlich von der Ordnung $(\mu H/kT)^2$. Dieser Wert ist in der Tat sehr klein, wenn man ihn mit den Ausdrücken aus der Formel (67) vergleicht. Eine ausführliche quantitative Untersuchung, bei der dem Quantelungseffekt und seinem Einfluß auf die hier entwickelte allgemeine Theorie Rechnung getragen werden soll, wird das Hauptthema der Arbeit sein, die in kurzer Zeit veröffentlicht werden soll.

Literatur.

- [1] Report on progress in Physics, vol. II, p. 129, 1935, article by E. V. Appleton. Report on the present state of our Knowledge of the Ionosphere, by S. K. Mitra, Proc. Nat. Inst. of Science of India, vol. 1, p. 231, 1935. Reviews of Modern Physics, vol. 9, p. 1, 1937, articles by H. R. Mimmo and E. O. Hulbert. — [2] H. M. Macdonald, Proc. Roy. Soc. London (A) **71**, 251, 1902—1903; ebenda **72**, 59, 1903 and **98**, 409, 1921. — [3] Lord Rayleigh, ebenda **72**, 40, 1903. — [4] H. Poincaré, ebenda **72**, 42, 1903; Comptes Rendus **54**, 795, 1912. — [5] A. E. H. Love, Phil. Trans. **215**, 105, 1915; G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. London (A) **95**, 83, 1918—1919; ebenda **95**, 546, 1918—1919; B. Van der Pol, Phil. Mag. **38**, 365, 1919. — [6] A. E. Kennely, Elec. World and Eng. **15**, 473, 1902. — [7] O. Heaviside, Ency. Brit. **33**, 215, 1902. — [8] W. H. Eccles, Proc. Roy. Soc. London (A) **87**, 79, 1912. — [9] J. Larmor, Phil. Mag. **48**, 1025, 1924. — [10] E. V. Appleton u. M. A. F. Barnett, Proc. Roy. Soc. London (A) **109**, 621, 1925; G. Breit u. M. A. Tuve, Phys. Rev. **28**, 554, 1926; R. L. Smith-Rose and R. H. Barfield, Proc. Roy. Soc. London (A) **110**, 580, 1926; ebenda **116**, 682, 1927; A. Pannekoek, Amst. Acad. Proc. **29**, 1165, 1926. — [11] S. Chapman, Proc. Phys. Soc. **43**, 26, 1931; ebenda **43**, 483, 1931; Proc. Roy. Soc. London (A) **132**, 353, 1931; Monthly notices R. A. S. **92**, 413, 1932; E. V. Appleton u. S. Chapman, Proc. I. R. E. **23**, 658, 1935; E. V. Appleton, Nature **131**, 872, 1933. — [12] E. A. Milne, Monthly notices R. A. S. **86**, 459, 578, 1926. — [13] E. V. Appleton, Proc. Phys. Soc. **37**, 16, 1925; U.R.S.I. Reports (Washington 1927); Jour. Inst. Elec. Eng. **71**, 642, 1932. — [14] S. Goldstein, Proc. Roy. Soc. London (A) **121**, 260, 1928. — [15] D. R. Hartree, Proc. Camb. Phil. Soc. **27**, 143, 1931. — [16] D. Blochinzev u. L. Nordheim, ZS. f. Phys. **84**, 168, 1933; M. Bronstein, Phys. ZS. d. Sowjet-Union **2**, 28, 1932. — [17] R. C. Majumdar, ZS. f. Phys. **91**, 706, 1934. — [18] D. F. Martyn u. O. O. Pulley, Proc. Roy. Soc.

London (A) **154**, 455, 1936. — [19] T. L. Eckersley, *Nature* **135**, 435, 1935. — [20] F. T. Farmer u. J. A. Ratcliffe, ebenda **135**, 585, 1935. — [21] V. A. Bailey u. D. F. Martyn, ebenda **133**, 218, 1934; *Phil. Mag.* **18**, 369, 1934; *Wir. Eng. & Expt. Wir.* **12**, 122, 1935. — [22] E. O. Hulbert, *Reviews of Modern Physics* **9**, 44, 1937. — [23] E. V. Appleton, *Report on progress in Physics* **2**, 162, 1935. — [24] C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **146**, 17, 1934. — [25] L. Landau, *ZS. f. Phys.* **64**, 629, 1930. — [26] E. Teller, ebenda **67**, 311, 1931. — [27] R. Peierls, ebenda **80**, 763, 1933. — [28] S. Titeica, *Ann. d. Phys.* **22**, 129, 1935. — [29] A. Sommerfeld u. W. Bartlett, *Phys. ZS.* **36**, 894, 1935.

Anhang.

Zum Vergleich stellen wir hier die von den verschiedenen Autoren benutzten Kürzungen zusammen:

	Bei uns	Appleton	Hartree	Goldstein
Wellenfrequenz	ω	p	$c K$	p
Stoßfrequenz	Δ	v	$2 c K_f$	0
Charakt. Frequenz des Mediums	$\left(\frac{4 \pi n e^2}{m}\right)^{1/2}$	p_0	$c K_0$	$\tilde{\omega}$ c
Kreisfrequenz	$\frac{e H_{L,T}}{m c}$	$p_{L,T}$		$\frac{p_{3,2}}{c}$
Doppelte Larmor-Frequenz	$\omega_L = \left(\frac{e H}{m c}\right)$	p_H	$c K_H$	$\frac{p_1}{c}$
$\left(\frac{\text{Charakt. Frequenz des Mediums}}{\text{Wellenfrequenz}}\right)^2$	$x_0 = \left(\frac{4 \pi n e^2}{m \omega^2}\right)$	x_0	$-\sigma_0 \left(1 - \frac{2 i k_f}{k}\right)$	$\frac{\tilde{\omega}^2}{p^2 c^2}$
Kreisfrequenz	$\eta_{L,T} = \left(\frac{e H_{L,T}}{m c \omega}\right)$	$\eta_{L,T}$	$-\tau_{L,T} \left(1 - \frac{2 i k_f}{k}\right)$	$\frac{p_{3,2}}{p c}$
Wellenfrequenz				
Brechungsindex	μ	μ	μ	μ
Extinktionskoeffizient	α	$\frac{c \alpha}{p}$		0

Außerdem

$$\xi_{(\text{Hartree})} = \frac{-x_0 \left(1 - \frac{i \Delta}{\omega}\right)}{\left(1 - \frac{i \Delta}{\omega}\right)^2 - y^2}, \quad \xi (1 - \tau^2)_{(\text{Hartree})} = -\frac{x_0}{1 - \frac{i \Delta}{\omega}}.$$

H_L bzw. H_T sind die Komponenten des Magnetfeldes parallel und senkrecht zu der Fortpflanzungsrichtung der Welle, und

$$H^2 = H_L^2 + H_T^2, \quad y = \frac{eH}{mc\omega}.$$

Es ist mir eine große Freude, meiner Frau für ihre Hilfe bei der Durchrechnung des mathematischen Teiles der vorliegenden Arbeit und Herrn Dr. D. S. Kothari für viele interessante Diskussionen meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Ich bin auch Herrn Prof. D. M. Bose für sein dauerndes Interesse an meiner Arbeit, und dem Direktor des Instituts, Herrn Sir J. C. Bose, für sein stets freundliches Entgegenkommen zu großem Dank verpflichtet.

Calcutta, Bose Research Institute, 93 Upper Circular Road.

Über die Beziehungen der Londonschen Gleichungen zur Beschleunigungstheorie der Supraleitung.

Von Fritz Bopp in Breslau.

(Eingegangen am 20. September 1937.)

Die Londonschen Gleichungen zur Beschreibung des supraleitenden Zustandes werden aus der Vorstellung der Beschleunigungstheorie entwickelt, nach der sich die Supraleitungselektronen ohne Widerstand durch das Metall bewegen.

London¹⁾ hat eine makrophysikalische Theorie des supraleitenden Zustandes angegeben, um einige Erscheinungen beschreiben zu können, wie den Meißner-Ochsenfeld-Effekt²⁾, die mit der üblichen Vorstellung allein nicht zu verstehen sind. Diese schließt bekanntlich eng an die ersten Versuche von Kamerlingh-Onnes an, nach denen sich die Elektronen unterhalb der kritischen Temperatur in der Nähe des Nullpunktes ohne Widerstand durch das Metall zu bewegen scheinen. Das supraleitende Metall verhält sich wie eine Substanz mit unendlicher Leitfähigkeit. Die Bewegungsgleichungen für die Elektronen im Metall sind darum genau so angesetzt worden³⁾ wie für Elektronen im leeren Raum unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes, nämlich

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m} \mathfrak{E}, \quad (1)$$

wobei n_0 die konstant angenommene Elektronendichte bedeutet. Mit dieser Gleichung hat man eine Reihe von Erscheinungen an supraleitenden Metallen beschreiben können.

London hat zu dieser Gleichung eine weitere hinzugefügt, die zu ihr etwa in demselben Verhältnis steht wie die Divergenzbeziehungen der Maxwell'schen Gleichungen zu den Rotationsbeziehungen. Durch Übergang zur Rotation von Gleichung (1) erhält er die Gleichung

$$A \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{j} = -\mathfrak{B}, \quad A = \frac{m}{n_0 e^2},$$

die er durch das Zeitintegral

$$\mathfrak{B} + A \text{rot } \mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

ersetzt. Dabei ist die Integrationskonstante — eine nur vom Orte, nicht von der Zeit abhängige Funktion — willkürlich Null gesetzt worden. Der Erfolg rechtfertigt das Verfahren. Denn es gelingt, den Meissner-Ochsenfeld-Effekt neben den früheren Erscheinungen zu verstehen.

¹⁾ F. London, Une Conception Nouvelle de la Supraconductibilité. Paris 1937; Act. Scient. et Industr. 458, Exposés de Phys. Théorique XV (zitiert als I). — ²⁾ W. Meißner, R. Ochsenfeld, Naturwiss. **21**, 787, 1933. — ³⁾ R. Becker, G. Heller, F. Sauter, ZS. f. Phys. **85**, 772, 1933.

Formal steht die neue Gleichung in engster Beziehung zu der früheren. Aber die Auffassung ist eine ganz andere. London lehnt die Vorstellung einer unendlichen Leitfähigkeit ab. Er stützt sich dabei auf einen Satz, der unabhängig von Bloch und Landau¹⁾ und von Brillouin¹⁾ ausgesprochen worden ist, nach dem ein Strom ohne Feld keinen energetisch stabilen Zustand darstellen könne. Tatsächlich, so meint London, sei Supraleitung ohne Feld auch nie beobachtet worden. Zwar verschwinde das elektrische Feld. Aber das magnetische sei keineswegs Null. Bei seiner bekannten Bedeutung müsse man es als stromtreibende Kraft ansehen. Der Ausdruck dafür sei Gleichung (2), während Gleichung (1), genauer gesagt die Gleichung

$$\mathfrak{E} - A \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \text{grad } u, \quad (3)$$

nur eine Folge davon sei. (Die Bedeutung der Funktion u wird zunächst offengelassen.) Die Entwicklung der Gleichung (2) aus Gleichung (1) hat nach dieser Auffassung nur heuristische Bedeutung.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Londonschen Gleichungen (2) und (3) entgegen seiner eigenen Auffassung²⁾ im vollen Einklang mit der Vorstellung der unendlichen Leitfähigkeit stehen, wenn man nur die entsprechenden Gleichungen in aller Vollständigkeit anschreibt. Die Deutung der Größe u in Gleichung (3) stellt sich dann von selbst ein. Zunächst wollen wir die Voraussetzungen für die unten folgenden Gleichungen angeben.

1. Die Elektronen im Metall werden als freie Teilchen behandelt.
2. Die elektrischen und magnetischen Felder wirken wie auf Elektronen im leeren Raum mit der Lorentz-Kraft.
3. Reibungskräfte bestehen nicht (Leitfähigkeit $\sigma = \infty$).
4. Im Gegensatz zum Ohmschen Gesetz muß man jedoch die Trägheitskräfte berücksichtigen³⁾.
5. Wie bisher sollen *zunächst* keine makrophysikalischen Schwankungen der Elektronendichte angenommen werden⁴⁾.

Unter diesen Voraussetzungen lauten die Bewegungsgleichungen für die Elektronensubstanz⁵⁾

$$m n_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \right) \mathbf{v} = - n_0 e (\mathfrak{E} + [\mathbf{v}, \mathfrak{B}]), \quad (4a)$$

¹⁾ F. Bloch, L. Landau, L. Brillouin u. a. vgl. Lit. l. c. I. — ²⁾ Vgl. l. c. I. S. 47. — ³⁾ Das ist bisher nicht vollständig geschehen. Man hat nur $\partial \mathbf{j} / \partial t$ mitgeführt, während man genauer die Beschleunigung der Elektronen durch die substanzielle Ableitung der Stromdichte \mathbf{j} ersetzen muß. — ⁴⁾ Diese Voraussetzung müssen wir später wegen Voraussetzung 4 aufgeben. — ⁵⁾ Bei der großen Analogie zur hydrodynamischen Bewegungsgleichung vermißt man den Druckgradienten. Wir werden später zeigen, daß der Druck praktisch konstant ist.

und die Kontinuitätsgleichung hat die Form der Inkompressibilitätsbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4b)$$

Nach elementarer Umformung (mit der Identität $(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]$) und Einführung der Stromdichte $\mathbf{j} = -n_0 e \mathbf{v}$ erhält man

$$\left. \begin{aligned} -\mathfrak{E} + A \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{1}{n_0 e} \operatorname{grad} \frac{A}{2} j^2 &= [\mathbf{v}, \mathfrak{B} + A \operatorname{rot} \mathbf{j}], \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \quad A = \frac{m}{n_0 e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Beziehung dieses Gleichungssystems zu dem Londonschen ist offensichtlich. Eine Lösung der Gleichungen (2) und (3) erfüllt auch die Gleichungen (4), wenn man die unbestimmte Funktion u im Gradienten der Gleichung (3) mit dem Ausdruck

$$u = \frac{A}{2 n_0 e} j^2 \quad (4a)$$

in der ersten Gleichung (4) identifiziert.

Der Zusammenhang mit den Gleichungen (2) und (3) wird nach den folgenden Umformungen noch deutlicher. Es gibt eine Funktion \mathfrak{U} , für die

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{U} &= \mathfrak{B} + A \operatorname{rot} \mathbf{j}, \\ \dot{\mathfrak{U}} &= -\mathfrak{E} + A \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{A}{2 n_0 e} \operatorname{grad} j^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ist, weil $\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{U}} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{U}$ ist. Mit dieser Funktion nimmt Gleichung (4) die Form an

$$\dot{\mathfrak{U}} = [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathfrak{U}], \quad (6)$$

und die Londonschen Gleichungen lauten:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{U} = \mathfrak{B} + A \operatorname{rot} \mathbf{j} = 0, \quad \dot{\mathfrak{U}} = -\mathfrak{E} + A \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{A}{2 n_0 e} \operatorname{grad} j^2 = 0. \quad (7)$$

Gleichung (6) ist eine lineare, partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion \mathfrak{U} . Man überschaut sofort, daß die zweite Gleichung (7) folgt, wenn die erste gilt. Aber man kann noch mehr zeigen. Aus Gleichung (6) folgen die beiden Gleichungen (7), wenn die erste in einem bestimmten Augenblick gilt. Sagen wir, zur Zeit $t = 0$ sei $\operatorname{rot} \mathfrak{U} = 0$, dann ist in diesem Augenblick auch $\dot{\mathfrak{U}} = 0$ und $\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{U}} = 0$. Durch fortgesetzte zeitliche Differentiation der Gleichung (6) findet man, daß in diesem Zeitpunkt ebenso

sämtliche zeitlichen Ableitungen von $\text{rot } \mathbf{u}$ und $\dot{\mathbf{u}}$ verschwinden. Damit gelten die Londonschen Gleichungen auch im nächsten Augenblick und — wie wir behauptet haben — allgemein.

Die Schlußweise ist aus der Hydrodynamik geläufig. Die Forderung $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ stellt die sinnvolle Verallgemeinerung der Bedingung für die wirbelfreie Strömung dar im Falle eines nichtkonservativen Kraftfeldes. (Die Strömung ist von dem durch das Magnetfeld bestimmten Drehschemel aus gesehen wirbelfrei.) Setzen wir

$$\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{u} = \mathfrak{B} + A \text{ rot } \mathbf{j}, \quad (8)$$

so folgt aus Gleichung (6) durch Rotationsbildung die Gleichung

$$\dot{\mathbf{w}} = \text{rot } [\mathbf{v}, \mathbf{w}]. \quad (9)$$

Diese stimmt formal mit der Helmholtzschen Wirbelgleichung überein. Der Zusammenhang zwischen \mathbf{v} und \mathbf{w} ist allerdings nicht mehr so einfach wie in der Hydrodynamik. Aber dieser Unterschied ist für die aus Gleichung (9) abzuleitenden integralen Wirbelsätze ohne Bedeutung. Sie gelten unverändert.

Die Gültigkeit der Gleichungen (7) ist also eine Frage der Anfangsbedingungen. Sie ist für jeden supraleitenden Zustand erwiesen, den man von einem geeigneten Grundzustand aus erreichen kann. Die Gleichungen (7) sind darum nur dann allgemein richtig, wenn man zusätzlich annimmt, daß sich beim Übergang zum supraleitenden Zustand von selbst die wirbelfreie Lösung der Gleichung (4) einstellt. Diese Annahme über die im Supraleiter möglichen Anfangsbedingungen kann man natürlich nicht aus den Grundgleichungen ablesen. Sie wird durch den Meißner-Ochsenfeld-Effekt nahegelegt und entspricht der Londonschen Voraussetzung, nach der der supraleitende Zustand vom Wege unabhängig ist, auf dem er sich einstellt. Die Vorstellung der widerstandsfreien Bewegung der Elektronen in einem supraleitenden Metall genügt also zur vollständigen Beschreibung des Zustandes der ausgebildeten Supraleitfähigkeit, wenn man die Forderung der Wirbelfreiheit hinzufügt. Dies macht es gewiß, daß man im Gegensatz zur Londonschen Auffassung nicht ohne diese Vorstellung auskommt. Doch reicht sie nicht zum Verständnis des Einstellvorganges hin. Im folgenden soll nur die ausgebildete Supraleitfähigkeit betrachtet werden.

Die Diskussion der Gleichungen (7) ist zum großen Teil bereits von London durchgeführt worden. Es kommt hier vor allem darauf an, die Bedeutung des Gradientengliedes zu untersuchen, das bei London unbestimmt bleibt und willkürlich Null gesetzt wird. Dafür ist die Betrachtung

des Energie-Impulsatzes aufschlußreich. Er folgt aus den Gleichungen (7) bzw. den Gleichungen (4) (die wir zunächst zugrunde legen wollen) und den unverändert geltenden Maxwell'schen Gleichungen, die wir in der Form

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{j}, & \operatorname{div} \mathfrak{D} &= \varrho = 0, & \mathfrak{D} &= \varepsilon_0 \mathfrak{E}, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\dot{\mathfrak{B}}, & \operatorname{div} \mathfrak{B} &= 0, & \mathfrak{B} &= \mu^0 \mathfrak{H} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ansetzen. Nach Voraussetzung (5) auf S. 624 müßte $\varrho = 0$ sein¹⁾. Doch ist das, wie wir später sehen werden, nicht mit den Gleichungen (7) verträglich.

Die Gleichungen (4) und (10) führen in der üblichen Weise zu folgendem Ergebnis. Der Energiesatz lautet

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{F} = 0. \quad (11)$$

Darin ist die Energiedichte W wie bei London durch den Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} + A \mathfrak{j}^2) \quad (11a)$$

gegeben. Neben der Feldenergie tritt die kinetische Energie der Elektronen auf in voller Übereinstimmung mit unserer Vorstellung über die ausgebildete Supraleitfähigkeit. Der Energiestrom \mathfrak{F} unterscheidet sich von dem Londonschen. Er hat die Form

$$\mathfrak{F} = [\dot{\mathfrak{E}}, \mathfrak{H}] + \frac{A}{2} \mathfrak{j}^2 \cdot \mathbf{v}. \quad (11b)$$

Das erste Glied, der Strahlungsfluß, tritt auch bei London auf. Aber das zweite Glied, das von dem Gradienten herrührt, fehlt bei ihm. Es besagt, daß die kinetische Energie der Elektronen mit dem Strome schwimmt. Diese Bedeutung liefert eine starke Stütze für die Notwendigkeit und Richtigkeit des Gradientengliedes. Denn es wäre kaum einzusehen, warum die kinetische Energie des Elektronenstromes am Orte ruhen solle.

Der Impulssatz lautet

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t} + \operatorname{Div} H = 0^2), \quad (12)$$

¹⁾ Vgl. Anm. 4, S. 624.

²⁾ $H = (H_{kl})$ ist ein Tensor und $\operatorname{Div} H = \sum_k \frac{\partial H_{lk}}{\partial k}$, die tensorielle Divergenz. I ist der Einheitstensor, und unter $H(\mathfrak{A})$ ist der Tensor

$$H_{kl}(\mathfrak{A}) = A_k A_l - \frac{1}{2} \mathfrak{A}^2 \delta_{kl}$$

zu verstehen.

In dieser Gleichung ist der Impuls \mathfrak{p} durch

$$\mathfrak{p} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] + n_0 (m \mathfrak{v} - e \mathfrak{A}) \quad (12a)$$

gegeben, und der Spannungstensor hat die Form

$$H = \varepsilon_0 H(\mathfrak{E}) + \frac{1}{\mu_0} H(\mathfrak{B}) - A H(i) + \left\{ \frac{A}{2} i^2 - n_0 e \varphi \right\} I. \quad (12b)$$

Der Impuls und der Spannungstensor setzen sich aus den entsprechenden Größen des Feldes und des Elektronenstromes additiv zusammen. Hier ist ein unmittelbarer Vergleich mit den Londonschen Gleichungen noch nicht sinnvoll.

Dazu muß man erst von den Gleichungen (4) zu den Gleichungen (7) übergehen. Dabei zerfällt der Impulssatz in zwei voneinander unabhängige Gleichungen. Setzt man nämlich

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2, \quad H = H_1 + H_2, \quad (13)$$

wobei die Bedeutung der einzelnen Größen durch die Gleichungen

$$\mathfrak{p}_1 = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}], \quad \mathfrak{p}_2 = n_0 (m \mathfrak{v} - e \mathfrak{A}) \quad (14a)$$

und

$$H_1 = \varepsilon_0 H(\mathfrak{E}) + \frac{1}{\mu_0} H(\mathfrak{B}) - A H(i), \quad H_2 = \left(\frac{A}{2} i^2 - n_0 e \varphi \right) I \quad (14b)$$

gegeben ist, dann kann man die zweite Gleichung (7)

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_2}{\partial t} + \text{Div } H_2 = 0 \quad (15a)$$

schreiben. Daraus folgt weiter mit Rücksicht auf Gleichung (12) und Gleichung (13)

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial t} + \text{Div } H_1 = 0. \quad (15b)$$

Die letzte Gleichung stimmt mit der Londonschen Form des Impulssatzes überein. Darüber hinaus erhält man die recht bemerkenswerte Trennung der Impulse in zwei völlig entkoppelte Bestandteile.

Im Hinblick auf die ursprüngliche Ableitung der Londonschen Gleichungen ist die Darstellung der Theorie in Vierervektoren bemerkenswert. Sie gibt erneut Aufschluß über die Bedeutung des Gradientengliedes. Wir gehen unmittelbar auf die Bewegungsgleichung zurück und berücksichtigen

darin die Massenveränderlichkeit der Elektronen¹⁾. An Stelle von Gleichung (4) tritt dann die Gleichung

$$m n_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \text{ grad} \right) \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = - n_0 e (\mathfrak{E} + [\mathbf{v}, \mathfrak{B}])$$

(c = Lichtgeschwindigkeit). Daraus folgt nach skalarer Multiplikation mit $\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$:

$$m n_0 c^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = - n_0 e (\mathfrak{E} \mathbf{v}).$$

Nach Einführung der üblichen Bezeichnungen der Viererschreibweise²⁾ lauten diese Gleichungen

$$m n_0 \sum_k u_k \frac{\partial u_l}{\partial k} = n_0 e \sum_k F_{kl} u_k, \quad (16)$$

und als Kontinuitätsgleichung erhält man, weil nach Voraussetzung (5) die Elektronendichte n_0 konstant ist:

$$\sum_k \frac{\partial j_k}{\partial k} = - n_0 e \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial k} = 0. \quad (17)$$

Gleichung (16) läßt sich auch in der Form

$$\sum_k u_k \left(\frac{\partial u_l}{\partial k} - \frac{\partial u_k}{\partial l} - \frac{e}{m} F_{kl} \right) = 0 \quad (17a)$$

schreiben, weil $\sum_k u_k^2 = -c^2 = \text{const}$ und damit $\sum_k u_k \frac{\partial u_k}{\partial l} = 0$ ist.

Daraus folgen die Londonschen Gleichungen wie oben, und zwar ist

$$F_{kl} = - \frac{m}{e} \left(\frac{\partial u_k}{\partial l} - \frac{\partial u_l}{\partial k} \right) \quad (18)$$

oder, weil n_0 konstant ist,

$$F_{kl} = A \left(\frac{\partial j_k}{\partial l} - \frac{\partial j_l}{\partial k} \right). \quad (19)$$

¹⁾ Das ist praktisch unbedeutend, aber zulässig und nicht dem Einwand ausgesetzt — wie das Invarianzargument bei London —, daß das Metallgitter ein bestimmtes Bezugssystem auszeichne, weil die Trägheit der kinetischen Energie auch in einem bestimmten Bezugssystem vorhanden ist.

²⁾ $(\mathbf{r}, i c t) = A(k), \left(\frac{\mathbf{v}}{V}, \frac{i c}{V} \right) = (u_k), \quad (\mathfrak{B}, \frac{1}{i c} \mathfrak{E}) = (F_{23} \dots F_{14} \dots).$

Diese Form hat London bereits angestrebt und durch sie das Gradientenglied bestimmen wollen. Aber es ist ihm entgangen, daß man den Faktor

$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ in dem Glied $\text{grad } j_4$ beim Übergang zu den klassischen Formeln nicht vernachlässigen darf.

Trotzdem kann man das Gradientenglied bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten als quadratischen Term in einem linearen Ausdruck vernachlässigen und erhält dann die Londonschen Gleichungen in der von ihm zuletzt vorgeschlagenen Form. Das Maß dafür ist aber nicht die Lichtgeschwindigkeit, sondern wie in der Hydrodynamik eine durch die räumliche Anordnung der Strömung bedingte Größe. Bei Berücksichtigung des Gradientengliedes ergibt sich als auffälligster Unterschied nach der zweiten Gleichung (7), daß im Innern eines Supraleiters auch im *stationären* Falle ein elektrisches Feld besteht, nämlich

$$\mathfrak{E} = - \frac{A}{2 n_0 e} \text{grad } j^2, \quad (20)$$

und daß es von einer Raumladung

$$\text{div } \mathfrak{D} = \varrho = - \frac{\epsilon_0 A}{2 n_0 e} \Delta j^2 \quad (21)$$

herrührt. Die Elektronen strömen so lange zu Stellen kleinerer Geschwindigkeit, bis das von ihnen erzeugte elektrische Feld den Trägheitskräften das Gleichgewicht hält.

Man könnte daran denken, daß die Trägheitskräfte nicht durch elektromagnetische Felder, sondern durch einen Druckgradienten kompensiert werden¹⁾. Dann müßte sich der Druck gemäß der Gleichung

$$\delta p = \frac{A}{2} j^2$$

mit der Stromdichte ändern. Daraus ergibt sich als Schwankung der Ladungsdichte

$$\delta n = \frac{3}{10} A j^2 \cdot \frac{n_0}{p_0},$$

wenn wir p mit dem Nullpunktsdruck p_0 identifizieren und berücksichtigen, daß $p_0 \sim n_0^{5/3}$ ist. Diese Schwankung ist jedoch groß gegen die durch Gleichung (21) gegebene

$$\delta' n = \frac{|\varrho|}{e} = \frac{\epsilon_0 A}{2 n_0 e^2} \Delta j^2 \approx \frac{\epsilon_0 \mu_0}{2 n_0 e^2} j^2 \quad \left(\frac{\delta n}{\delta' n} \approx \frac{3}{5} \frac{n_0 m c^2}{p_0} \approx 2 \cdot 10^5 \right).$$

Danach kann man den Druckgradienten gegen die elektrischen Kräfte vernachlässigen.

¹⁾ Vgl. Anm. 5, S. 624.

Die Verschiebung der Ladungen im Supraleiter ist nicht mit Voraussetzung (5) auf S. 624 verträglich¹⁾. Aber die Änderung der Elektronendichte $\delta n = \varrho/e$ ist stets sehr klein (bei stärksten Feldern ist $\delta n/n_0 \approx 10^{-8}$), so daß man sie praktisch ohne Fehler gegen die Elektronendichte n_0 vernachlässigen kann. Darum bleiben die Londonschen Gleichungen bei nachträglicher Berücksichtigung der Ladungsänderung unverändert. Dagegen ist die Ladungsdichte ϱ in den Maxwell'schen Gleichungen (10) im allgemeinen von Null verschieden und an die Stelle der zweiten Gleichung (4) tritt die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \dot{\varrho} = 0. \quad (22)$$

Das von den Trägheitskräften induzierte elektrische Feld rührt nicht allein von der Raumladung ϱ her. Der Einfachheit halber soll das nur im Falle stationärer Felder gezeigt werden. Wenn wir Gleichung (21) über das ganze supraleitende Gebiet integrieren, erhalten wir als Gesamtladung im Supraleiter

$$Q = -\frac{\varepsilon_0 A}{2n_0 e} \int \frac{\partial \dot{\mathbf{j}}^2}{\partial r} df. \quad (23)$$

(Das Integral ist über die Oberfläche des Supraleiters zu erstrecken: $\partial/\partial r$ bedeutet die Ableitung in Richtung der äußeren Flächennormale.) Wegen des exponentiellen Abklingens der Stromdichte an der Oberfläche wird Q im allgemeinen nicht verschwinden und einen negativen Wert haben. Andererseits ist die Gesamtladung des Metalls 0. Es muß also eine ebenso große Ladung $|Q|$ auf der Oberfläche des Supraleiters sitzen. Die Vergrößerung der Elektronendichte im Innern geschieht auf Kosten der OberflächenElektronen.

Zur Bestimmung der Ladungsverteilung auf der Oberfläche gehen wir von der Identität

$$\dot{\mathbf{j}}^2 = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \int \frac{A' \dot{\mathbf{j}}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' - \int \frac{\partial \dot{\mathbf{j}}^2 / \partial r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} df' + \int \dot{\mathbf{j}}^2 \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) df' \right\}$$

aus, die sich durch Anwendung des Greenschen Satzes auf die Funktionen $\dot{\mathbf{j}}^2$ und $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ergibt. (Die mit ' bezeichneten Funktionen und Operatoren beziehen sich auf die Integrationsvariablen \mathbf{r}'). Führt man darin das innere Potential

$$\varphi = \frac{A}{2n_0 e} \dot{\mathbf{j}}^2$$

¹⁾ Vgl. Anm. 4, S. 624 und Bemerkung im Anschluß an Gleichung (10).

gemäß Gleichung (20) ein, und setzt man zur Abkürzung

$$\varrho = -\frac{\varepsilon_0 A}{2n_0 e} A \dot{r}^2, \quad \eta = +\frac{\varepsilon_0 A}{2n_0 e} \frac{\partial \dot{r}^2}{\partial r}, \quad \omega = -\frac{\varepsilon_0 A}{2n_0 e} \dot{r}^2, \quad (24)$$

dann lautet diese Identität

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\tau' + \int \frac{\eta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} df' + \int \omega(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) df' \right\}. \quad (25)$$

Das innere Feld rührt also von der Raumladung ϱ , der Flächenladung η und einer über die Oberfläche verteilten Doppelschicht ω her. Die gesamte Oberflächenladung $\int \eta df = |Q|$ hat den bereits oben erwarteten Wert. Die Ladungen sind so verteilt, daß sich das induzierte elektrische Feld nicht in den Außenraum fortsetzt. Denn aus den Gleichungen für den Sprung der elektrischen Verschiebung und des Potentials an der Oberfläche,

$$\mathfrak{D}_r^{(a)} - \mathfrak{D}_r^{(i)} = \eta, \quad \varphi^{(a)} - \varphi^{(i)} = \omega,$$

folgt, [die Indizes (a) und (i) bedeuten „außen“ bzw. „innen“],

$$\mathfrak{D}_r^{(a)} = 0, \quad \varphi^{(a)} = 0. \quad (26)$$

Das innere elektrische Feld läßt sich also im Außenraum nicht beobachten.

Herrn Prof. Dr. E. Fues danke ich für sein stetes Interesse und für fördernde Diskussionen während der Ausarbeitung.

Breslau, Institut für theoretische Physik der Universität.

Spitzenwirkung bei elektrolytischen Ventilanoden.

Von A. Güntherschulze und Hans Betz.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 25. September 1937.)

An aufgerauhtem Ta setzt die Formierung in NaOH-Lösungen erst ein, wenn die Stromdichte 1000 mal so groß ist, als an hochglanzpoliertem Ta, und verläuft außerordentlich langsam. Die Erscheinung wird durch Spitzenwirkung erklärt. Versuche mit anderen Elektrolyten zeigen, daß sowohl die „Anspringstromdichte“, als auch die Formierungsgeschwindigkeit ein Maß für die Festigkeit der Bindung der Elektronen in den Anionen des Elektrolyten ist. Verschiedene aus der obigen Annahme abgeleitete Folgerungen werden durch Versuche bestätigt.

Bei der Formierung von Ta-Anoden ergab sich gelegentlich eine erstaunlich geringe Formierungsgeschwindigkeit, ohne daß die Ursache davon erkannt werden konnte. Als dann bei Wechsel des die Ta-Stäbe polierenden Mechanikers plötzlich die Formierungsgeschwindigkeit auf geringe Werte sank und die Nachfrage ergab, daß der neue Mechaniker ein neues, weniger stark hochglanzpolierendes Verfahren benutzte, wurde der Einfluß der Vorbehandlung der Ta-Oberfläche auf die Erscheinungen der Formierung untersucht.

1. Versuche mit NaOH-Lösungen.

In NaOH-Lösungen waren die Unterschiede zwischen hochglanzpoliertem und aufgerauhtem Ta am größten. Als besonders geeignet zur Messung des Einflusses des Aufrauhs erwies sich die Messung der Anspringstromdichte, d. h. derjenigen Stromdichte, bei welcher die Formierung sofort merkbar einsetzt. Schon früher war gelegentlich beobachtet worden, daß unterhalb einer bestimmten Stromdichte ein Ta-Stab sehr lange Zeit als Anode eingeschaltet werden konnte, ohne daß die Spannung an ihm über die normale Wasserzersetzungsspannung hinaus stieg, während oberhalb dieser kritischen Stromdichte die Formierungsgeschwindigkeit der Stromdichte annähernd proportional war.

Tabelle 1 zeigt den Zusammenhang zwischen Vorbehandlung der Oberfläche mit verschiedenen Schmirgelsorten und der Anspringstromdichte in einer NaOH-Lösung. Dabei wurde die durch das Grobschmirgeln erzeugte Oberflächenvergrößerung durch Kapazitätsmessungen ermittelt und bei der Berechnung der Stromdichte in Rechnung gesetzt. Den Werten

der Tabelle 1 liegen also gleiche wirkliche Oberflächen zugrunde. Die Ergebnisse sind erstaunlich. Bei dem gröbsten angewendeten Schmirgel ist die Anspringstromdichte 1000mal so groß wie bei der besten Politur.

Tabelle 1. Abhängigkeit der Anspringstromdichte von der Rauigkeit des Ventilmetalles.

Ventilmetall: Tantal; Elektrolyt: NaOH-Lösung mittlerer Konzentration.
Versuchstemperatur: 20°C.

Bezeichnung des zum Auf- rauen verwendeten Schmirgelpapiers ¹⁾	Anspring- stromdichte mA/cm ²	Bezeichnung des zum Auf- rauen verwendeten Schmirgelpapiers ¹⁾	Anspring- stromdichte mA/cm ²
Nr. 120	52	2/0	18,7
„ 150	42	3/0	7,7
„ 280	43	4/0	5,8
1 F	50	Stab hochgradig poliert	0,055
0	8,3		

II. Erklärung der beobachteten neuen Erscheinung.

Freie Elektronen eines Metalles können aus der Metalloberfläche durch hinreichende Temperatur herausgeholt werden, gebundene Elektronen chemischer Verbindungen jedoch nur durch hinreichende Feldstärken. Die Feldstärke ist ein Maß der Elektronenbindung. Wirken diese Feldstärken über atomare Abstände hin, wie an einer gewöhnlichen Elektrolytelektrode, so sind die aus ihnen sich ergebenden Spannungen sehr gering. Ist jedoch eine isolierende Schicht zwischen Elektrode und Elektrolyt, so muß die Ablösefeldstärke durch diese ganze Schicht hindurch wirken und führt dann zu großen Spannungen. Ist dabei die Feldstärke noch nicht so groß, daß das Ionengitter des Isolators ins Rutschen kommt, so fließt ein reiner Elektronenstrom durch die Isolierschicht, wird die Feldstärke soweit gesteigert, daß das Gitter der Oxydschicht zu gleiten beginnt, so lagert sich im Isolator ein Ionenstrom über den Elektronenstrom und die Dicke des Isolators nimmt zu.

Dieser Fall liegt bei den isolierenden Oxydschichten der elektrolytischen Ventilmetalle vor. Sowohl der Elektronenstrom wie der Ionenstrom steigen bei Ta mit der Feldstärke nach einer e -Funktion an. Die Konstanten dieser Funktionen sind jedoch für die beiden Ströme verschieden.

Nun ist an Spitzen die zu einer gegebenen makroskopischen Spannung gehörende Feldstärke um so mehr über die normale, an ebenen Flächen vor-

¹⁾ Das Schmirgelpapier wurde von der Firma Jean Wirtz, Düsseldorf, geliefert.

handene Feldstärke erhöht, je kleiner der Krümmungsradius der Spitzen ist. In dem sehr harten Ta reißt ein noch härterer Schmirgel sehr scharfkantige Furchen auf. Dadurch wird an diesen Kanten die Elektronenemission gegenüber der ebenen Flächen sehr stark begünstigt. Während bei einer gegebenen makroskopischen Stromdichte die Elektronenemission an ebenen Stellen erst dann hinreicht, wenn die Feldstärke so groß geworden ist, daß auch das Gitter kräftig gleitet, also die Oxydschicht schnell weiter wächst, liefern die scharfen Kanten bereits bei einer wesentlich kleineren Feldstärke einen hinreichenden Elektronenstrom. Um die zum Gittergleiten erforderliche Feldstärke zu erreichen, muß der Strom jetzt weitgehend über den Wert gesteigert werden, der an ebenen Flächen erforderlich ist.

Nach Tabelle 1 ist in NaOH dazu bei grob aufgerautem Ta die tausendfache Stromdichte erforderlich wie an glattem Ta.

Aus dieser Erklärung lassen sich folgende experimentell prüfbare Folgerungen ziehen:

1. Wenn die Formierung durch hinreichende Stromdichte eingeleitet wird, so bettet die wachsende Oxydschicht mehr und mehr Spitzen in sich ein und macht sie unwirksam. Folglich kann die Formierungsgeschwindigkeit bei konstanter Stromdichte nicht wie bei hochglanzpoliertem Ta konstant sein, sondern muß mit der erreichten Schichtdicke oder der Formierungsspannung zunehmen. Sie muß aber stets viel geringer bleiben als bei hochglanzpoliertem Ta.

2. Da die Formierung ausgleichend auf die Oberfläche wirkt, muß die Spitzenwirkung um so mehr zurücktreten

a) je höher die Spannung ist, bis zu welcher formiert wird;

b) je länger die Einschaltungsdauer bei gegebener Spannung ist.

3. Die Stromspannungscharakteristik muß an rauhem Ta eine andere sein als an hochglanzpoliertem.

4. Wieweit der Elektronenstrom gegenüber dem Ionenstrom durch Spitzenwirkung zunimmt, hängt von der Festigkeit der Bindung der Elektronen ab. Je lockerer die Elektronenbindung ist, um so größer muß die Anspringstromdichte, um so geringer die Formierungsgeschwindigkeit bei gegebener Stromdichte sein. Die Festigkeit der Elektronenbindung hängt erstens von der Ionenart und zweitens von der Temperatur ab. Es ist zu vermuten, daß es negative Elektrolytionen gibt, bei denen die Elektronen so fest gebunden sind, daß sie auch an Spitzen erst dann in genügender

Menge verfügbar werden, wenn bereits an den ebenen Stellen die Feldstärke so groß geworden ist, daß Gittergleiten, also Formierung, eintritt. Aber auch in diesem Falle muß die Formierungsgeschwindigkeit hinter der an hochglanzpoliertem Ta erhaltenen um so mehr zurückbleiben, je loser die Elektronen gebunden sind.

5. Da die Elektronenbindung mit steigender Temperatur abnimmt, muß in Elektrolyten, in denen bei niedriger Temperatur schon bei kleinen Stromdichten eine wenn auch sehr langsame Formierung einsetzt, durch Temperaturerhöhung eine merkliche Anspringstromdichte erzwungen werden können.

III. Experimentelle Prüfungen der Folgerungen.

1. *Formierungsgeschwindigkeit.* Um zu prüfen, ob die Formierungsgeschwindigkeit mit der Formierungsspannung und Schichtdicke stark zunimmt, wurden die Formierungskurven mit einem Schleifenzosillographen von S. & H. aufgenommen. Der Motor des Oszillographen wurde soweit gedrosselt, daß die Trommel mit dem lichtempfindlichen Papier in 100 sec eine Umdrehung machte. Die Spannung der elektrolytischen Zelle lag unmittelbar an einer Oszillographenschleife. Die Formierungsstromdichte wurde so groß gewählt, daß sich die Zelle während eines Bruchteils einer Umdrehung hinreichend formierte. Aus dem Oszillogramm konnte die Formierungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der erreichten Formierungsspannung berechnet werden.

Die Auswertung ergab die Werte der Tabelle 2.

Tabelle 2. Ta-Stab in NaOH-Lösung mittlerer Konzentration.

Oberflächen- beschaffenheit	Formierungs- stromdichte	Erreichte Spannung	Formierungsgeschwindig- keit bei dieser Spannung
Hochglanzpoliert	34 mA/cm ²	60 Volt	20 Volt/min · mA
Mit grobem Schmirgel aufgeraut	147 mA/cm ²	4 Volt	0,26 Volt/min · mA
		8	0,27
		11	0,41
		15	0,72
		19	0,68
		25	1,20
		33	1,19
		41	1,37
		50	1,54

Bei 60 Volt erster Funken.

Die Tabelle, die an einem Stab mit außergewöhnlich großer Anspringsstromdichte erhalten wurde, zeigt

1. Die Formierungsgeschwindigkeit setzt mit sehr kleinen Werten ein und steigt schnell an,

2. Selbst der größte erreichte Wert liegt weit unter der Formierungsgeschwindigkeit gut polierter Stäbe. Im vorliegenden Falle ist er nur 7,7% davon.

2. Mit zunehmender Schichtdicke und Einschaltdauer abnehmende Spitzenwirkung und

3. u/i -Kurven. Daß die Spitzenwirkung um so mehr zurücktritt, je größer die Schichtdicke ist, ergibt sich bereits aus der mit der Schichtdicke stark zunehmenden Formierungsgeschwindigkeit. Zur Feststellung des Einflusses der Einschaltdauer auf die Stromspannungskurven wurde eine mit grobem Schmirgel aufgerauhte Ta-Anode bei 112 Volt formiert und zum ersten Male nach einstündiger Formierung die Stromspannungskurve aufgenommen. Die Aufnahme wurde nach 20- und 44-stündiger Weiterformierung an 112 Volt wiederholt. Fig. 1 zeigt das Ergebnis. Die ausgezogene Kurve ist die Stromspannungskurve nach einstündiger Einschaltung, die gestrichelte nach 20-stündiger, wobei durch Umrechnung die Stromwerte bei 112 Volt einander gleichgesetzt wurden. Der Zweck dieser Umrechnung ist, die Änderung der Krümmung der Kurve mit der Dauereinschaltung zu zeigen. Fig. 1 zeigt, daß die u/i -Kurve nach einstündiger Einschaltung von 0 bis 50 Volt geradlinig verläuft. Dieser geradlinige Verlauf geht infolge des Abbaues der Spitzen durch eine längere Formierung in einen gleichmäßig gekrümmten über. Ferner sind die Ströme wesentlich größer als bei einer hochglanzpolierten Anode nach gleicher Formierungsdauer.

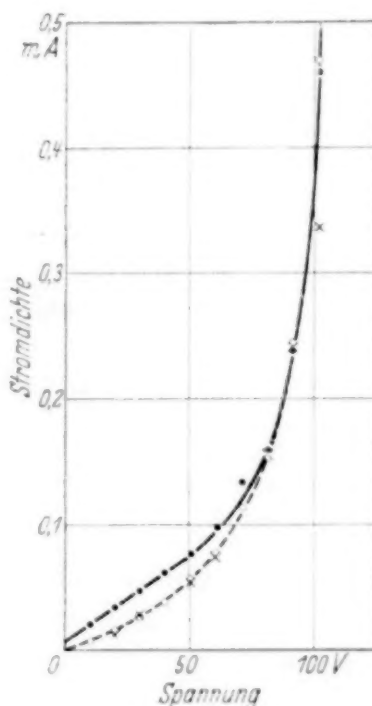


Fig. 1. Stromspannungskurven von aufgerauhtem Ta in verdünnter NaOH-Lösung. Formierungsspannung 112 Volt; Temperatur des Elektrolyten 20° C.

● Meßwerte nach 1 stündiger Formierung
○ " " 20 " "
× " " 44 " "

Somit ergibt sich: Wenn Spitzenwirkung vorhanden ist, verläuft die u/i -Kurve in dem unteren Teil geradlinig. Je länger dieser geradlinige Teil ist, um so stärker ist die Spitzenwirkung.

Die Umkehrung: Wenn die u/i -Kurve im unteren Teil geradlinig ist, so ist Spitzenwirkung vorhanden, ist jedoch nur bei Al, Bi und Ta erlaubt, nicht dagegen bei W und Zr. Bei den drei ersten Metallen befindet sich nämlich die Oxydschicht stets in einem äußerst schlechtleitenden Zustand.

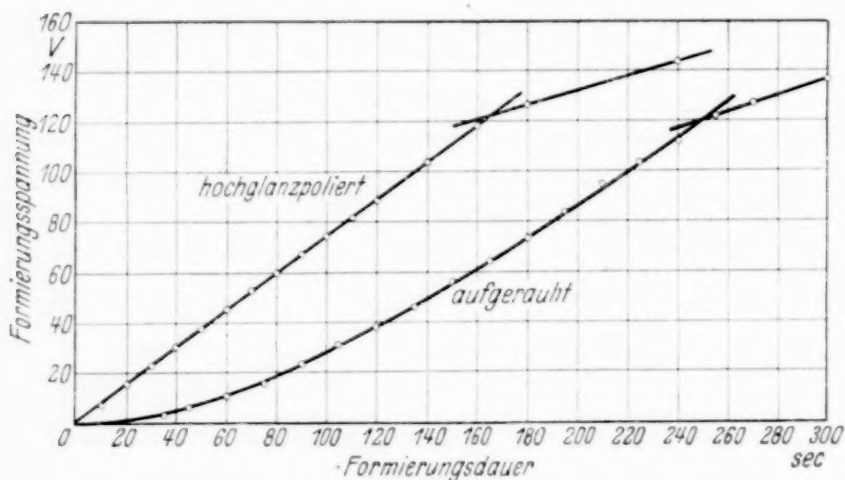


Fig. 2. Formierungskurven von Ta in 0,075 äq. n H_2SO_4 -Lösung. Temperatur des Elektrolyten $18^\circ C$; Formierungsstromdichte 2 mA/cm^2 .

Bei W und Zr dagegen nur dann, wenn an ihr ein großer Sauerstoffdruck herrscht¹⁾. Sobald dieser durch Senken der Spannung verringert wird, werden die an das Metall grenzenden Lagen der Oxydschicht durch Sauerstoffmangel leitend. Infolgedessen nimmt die Feldstärke und damit auch der Strom in dem schlechtleitenden Teil langsamer ab, als wenn die ganze Schicht schlecht leitete, so daß sich ein geradliniger Zusammenhang zwischen u und i ergeben kann.

4. *Spitzenwirkung in anderen Elektrolyten.* a) H_2SO_4 . Bei Zimmertemperatur gelingt es nicht, eine Anspringstromdichte zu messen. Schon bei 2 mA/cm^2 setzt die Formierung, wenn auch etwas verzögert, ein, wie Fig. 2 zeigt. Über die Formierungsgeschwindigkeiten gibt Tabelle 3 Auskunft.

Hieraus folgt, daß die Elektronenbindung bei $(HSO_4)^-$ um so viel größer ist, als bei $(OH)^-$ -Ionen, daß bei ersteren hinreichende Elektronenmengen selbst an Spitzen erst bei einer Feldstärke abgelöst werden, bei welcher das Ta_2O_5 -Gitter bereits kräftig gleitet. In $1 \text{ n } H_2SO_4$ ist die Konzentration der $(OH)^-$ -Ionen etwa $0,6 \cdot 10^{-14} \text{ n}$.

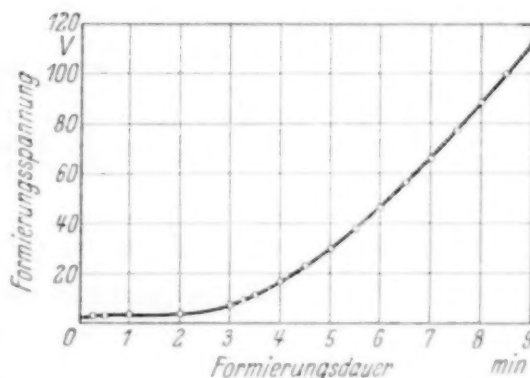
¹⁾ O. Mohr, ZS. f. Phys. **93**, 298, 1935.

Tabelle 3. Formierungsgeschwindigkeit von hochglanzpoliertem und aufgerauhtem Ta in 0,075 äq. n H_2SO_4 bei 20°C.

Formierungsspannung . .	5	10	50	100 Volt
Hochglanzpoliert	22	22	22	22 Volt/min · mA
Aufgerauht	7	10,4	16	20,4 Volt/min · mA
Verhältnis: $\frac{\text{hochglanzpoliert}}{\text{aufgerauht}}$	3,14	2,11	1,37	1,08 Volt/min · mA

b) Na_2SO_4 . Fig. 3 zeigt, daß hier die Formierung sehr viel langsamer einsetzt, als in H_2SO_4 . Die anfängliche Formierungsgeschwindigkeit beträgt nach 1,5 min Einschaltung 0,44 Volt/min · mA und nach 3,5 min Einschaltung 6,2 Volt/min · mA. In 1 äq. n Na_2SO_4 ist die Konzentration der $(OH)^-$ -Ionen $0,8 \cdot 10^{-7}$ n.

c) $NaOH-H_2SO_4$ -Gemisch. Die bisherigen Ergebnisse führten zu der Untersuchung der Mischungsreihe $NaOH-H_2SO_4$. Ein aufgerauhter Ta-Stab wurde in 87 cm^3 1 n $NaOH$ -Lösung mit einer Stromdichte von $5,2 \text{ mA/cm}^2$ belastet, wobei er noch nicht ansprang. Dann wurde aus einer Bürette allmählich 1 äq. n H_2SO_4 -Lösung zugesetzt.

Fig. 3. Formierungskurve von aufgerauhtem Ta in 0,5 äq. n Na_2SO_4 -Lösung. Temperatur des Elektrolyten 18°C; Formierungsstromdichte $1,6 \text{ mA/cm}^2$.

Bei Zusatz von 83 cm^3 H_2SO_4 , also wenn die Lösung bei 1 n Gesamtgehalt an $NaOH$ noch 0,021 n war, sprang die Formierung bei der gewählten Stromdichte von $5,2 \text{ mA/cm}^2$ an. Bei dieser Konzentration sind offenbar nicht mehr hinreichende Mengen $(OH)^-$ -Ionen an den Spitzen verfügbar. Es muß auf $(HSO_4)^-$ - oder $(SO_4)^{2-}$ -Ionen zurückgegriffen werden und diese leiten die Formierung ein.

d) Na_2CO_3 nahezu bei Zimmertemperatur gesättigt. Da Na_2CO_3 alkalisch reagiert, ist eine schlechte Formierung bei Spitzenwirkung zu erwarten. Fig. 4 zeigt die Formierung. Es ergibt sich in der Tat eine außerordentliche Verringerung der Formierungsgeschwindigkeit. Bei hochglanzpoliertem Ta betrug sie konstant 24 Volt/min · mA, bei aufgerauhtem Ta bei 5 Volt 2,6 Volt/min · mA. Das Verhältnis beider ist 9,24.

e) $K_4Fe(CN)_6$. Ta hat in $K_4Fe(CN)_6$ eine durch das im Anion befindliche Fe stark verringerte Maximalspannung (in 0,05 n Lösung 80 Volt

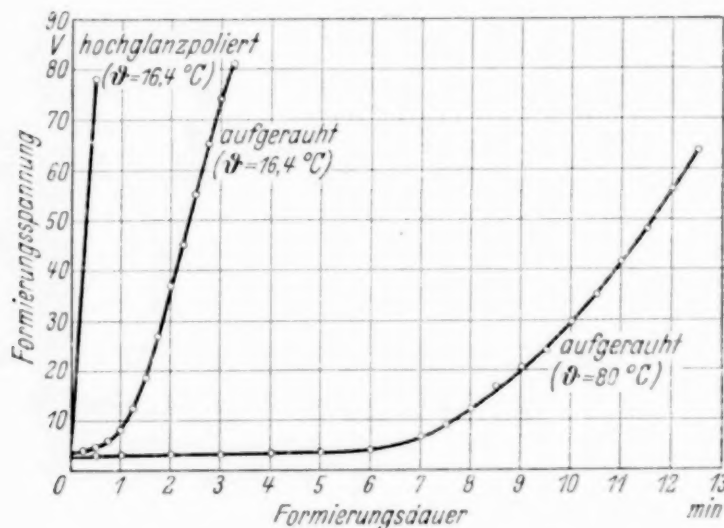


Fig. 4. Formierungskurven von Ta in bei Zimmertemperatur nahezu gesättigter Na_2CO_3 -Lösung. — Formierungsstromdichte 6 mA/cm^2 .

gegenüber 450 Volt in gewöhnlichen Elektrolyten). Es wurde schon immer vermutet, daß diese Erscheinung mit der Lockerung der Elektronenbindung

durch das Eisen zusammenhängt (auch konzentrierte $NaOH$ -Lösung hat eine erstaunlich niedrige Maximalspannung). Fig. 5 gibt die Formierungskurve von aufgerauhtem und hochglanzpoliertem Ta in nahezu gesättigter $K_4Fe(CN)_6$ -Lösung.

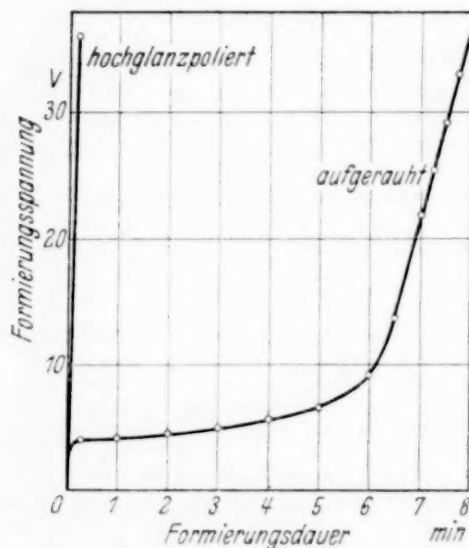


Fig. 5. Formierungskurven von Ta in bei Zimmertemperatur gesättigter $K_4Fe(CN)_6$ -Lösung. — Formierungstemperatur $18^\circ C$; Formierungsstromdichte 10 mA/cm^2 .

Die Erwartung bestätigt sich. Die Formierung ist ebenfalls außerordentlich langsam. Bei 5 Volt Formierungsspannung ist das Verhältnis $\frac{\text{hochglanzpoliert}}{\text{aufgerauht}} = 130$.

5. Temperatursteigerung. a) Eine bei Zimmertemperatur gesättigte $K_4Fe(CN)_6$ -Lösung wurde auf $80^\circ C$ erhitzt. Bei einer Stromdichte von 18 mA sprang die Formierung innerhalb von 25 min nicht an. Bei Abkühlung der Lösung auf $17,5^\circ C$ trat schon nach 1 min eine deutliche Formierung ein.

b) In einer bei Zimmertemperatur gesättigten Na_2CO_3 -Lösung setzte die Formierung bei 80°C bei einer Stromdichte von 6 mA/cm^2 zwar ein, aber außerordentlich langsam. Fig. 4 zeigt diese Formierung. Die Formierungsgeschwindigkeit ist anfangs: $0,033\text{ Volt/min} \cdot \text{mA}$.

IV. Schlußbemerkung.

Nach dem Vorstehenden haben sich sämtliche aus den angestellten Überlegungen gezogenen Folgerungen bestätigt. Es scheint also in der Tat die Anspringstromdichte und die Formierungsgeschwindigkeit an aufgerauhtem Ta ein Maß für die Bindungsfestigkeit der Elektronen der Anionen zu sein. Ob sich dieses Verfahren der Ermittlung der Bindungsfestigkeit zu einem quantitativen ausgestalten läßt, müssen weitere Versuche ergeben. Ebenso wie die Verhältnisse an den übrigen Ventilmetallen sind.

(Mitteilung aus dem Institut für Allgemeine Elektrotechnik der Technischen Hochschule Dresden.)

Die Übertemperatur im Dunkelraum der Glimmentladung.

Von A. Güntherschulze und Werner Bär.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 6. Oktober 1936.)

Es werden die Wärmeleitungsgleichungen für eine Glimmentladung zwischen zwei ebenen Elektroden konstanter Temperatur abgeleitet, die mit einem sie trennenden Glasring das Entladungsgefäß bilden. Aus ihnen folgt für 2000 Volt Kathodenfall und $0,5 \text{ mA/cm}^2$ Stromdichte in Ar eine mittlere Übertemperatur von 2127°C , wenn angenommen wird, daß die gesamte Kathodenfallenergie zur Erwärmung des Gases im Dunkelraum dient. Demgegenüber ergeben die Messungen bei verschiedenen Gasen aus der Druckänderung beim Ein- und Ausschalten der Entladung Übertemperaturen von der Größenordnung 10°C . Da ein Teil dieser so geringfügigen Übertemperaturen von der Gaserwärmung durch die von der Kathode zur Anode fliegenden Elektronen herrührt, ergibt sich: Die Energiemengen, die die Kationen bei anomalem Kathodenfall von der Größenordnung 1000 Volt und mehr im Fallraum an das Gas abgeben, sind so gering, daß sie bei der Ermittlung der an die Kathode abgegebenen Energie nicht einmal als Korrektur berücksichtigt zu werden brauchen. — Daraus folgt weiter, daß der Akkomodationskoeffizient hier gleich 1 ist. — Eine Erklärung dieser äußerst geringen Energieabgabe an das Gas wird versucht.

Nach den gaskinetischen Stoßgesetzen geben die auf die Kathode zuströmenden positiven Ionen im Mittel die Hälfte ihrer kinetischen Energie beim Stoß auf die Gasmoleküle ab, wodurch das Gas erwärmt wird. Für die dadurch erzeugten Übertemperaturen des Gases seien zunächst die Formeln abgeleitet.

I. Temperaturen in einem elektrisch aufgeheizten Gas zwischen zwei planparallelen, auf konstanter Temperatur gehaltenen Platten.

Zwei ebene Platten seien die beiden Elektroden einer Glimmentladung. Sie seien durch einen Glasring voneinander getrennt, so daß eine zylindrische Dose entsteht. Der Durchmesser des Zylinders sei im Vergleich zum Elektrodenabstand so groß, daß die radiale Wärmeströmung vernachlässigt werden kann. Betrachtet werden die Vorgänge in einer Säule längs der Zylinderachse von 1 cm^2 Querschnitt.

Annahme 1: In jedem cm^3 der Säule wird die gleiche Wärmemenge q entwickelt. In der gesamten Säule also $q \cdot d = Q$, wenn d der Elektrodenabstand ist.

Dann liegt die Zone höchster Temperatur in der Mitte zwischen den Elektroden. Die Maximaltemperatur ist

$$\vartheta_{\max} = \frac{Q \cdot d}{8\lambda} \quad (1)$$

und die mittlere

$$\vartheta_{\text{mi}} = \frac{Q \cdot d}{12\lambda}, \quad (2)$$

wenn λ das Wärmeleitvermögen des Gases ist.

Annahme 2: Im Fallraum steigt die Feldstärke von der Glimmkante zur Kathode annähernd proportional der Entfernung von der Glimmkante an. Also auch die Ionenenergie und somit, wenn auch etwas nach der Kathode hin verschoben, die von den Ionen an das Gas abgegebene Stoßenergie. Dieser Fall würde vorliegen, wenn die Anode genau in die Glimmlichtkante verlegt werden könnte. Es ist also (Fig. 1) $q = c \cdot x$.

Dann ist die höchste Temperatur in einer zu berechnenden Ebene x_1 . Von ihr geht der Wärmefluß nach beiden Seiten.

1. Nach rechts geht durch eine Zone x die gesamte zwischen x und x_1 erzeugte Wärme. Also ist

$$c(x - x_1)x_1 + \frac{c}{2}(x - x_1)^2 = \lambda \frac{d\vartheta}{dx},$$

$$d\vartheta = \frac{c}{\lambda} \left(x_1 x - x_1^2 + \frac{x^2}{2} - x_1 x + \frac{x_1^2}{2} \right) dx = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} \right) dx,$$

$$\vartheta_{\max} = \frac{c}{2\lambda} \left(\frac{x^3}{3} - x_1^2 x \right)_{x_1}^d = \frac{c}{2\lambda} \left(\frac{2}{3} x_1^3 + \frac{d^3}{3} - x_1^2 d \right).$$

2. Links ergibt sich in gleicher Weise:

$$c(x_1 - x)x_1 - \frac{c}{2}(x_1 - x)^2 = \lambda \frac{d\vartheta}{dx},$$

$$d\vartheta = \frac{c}{2\lambda} (x_1^2 - x^2) dx,$$

$$\vartheta_{\max} = \frac{c}{2\lambda} \left(x_1^2 x - \frac{x^3}{3} \right)_0^{x_1} = \frac{c}{2\lambda} \cdot \frac{2}{3} x_1^3.$$

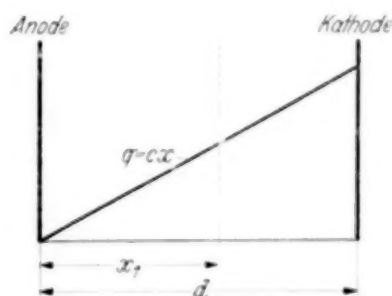


Fig. 1.

x_1 berechnet sich aus der Bedingung, daß beide ϑ_{\max} gleich sind, zu

$$\begin{aligned} x_1^2 d &= \frac{d^3}{3} \\ x_1 &= \frac{d}{\sqrt{3}} = 0,578 d. \end{aligned} \quad (3)$$

Nun ist

$$Q = \frac{c \cdot d^2}{2}.$$

Also

$$\vartheta_{\max} = \frac{c}{2} \frac{2}{3} \frac{d^3}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{Q}{\lambda} \cdot \frac{d}{15,58}. \quad (4)$$

Ferner ist die mittlere Temperatur ϑ_{mi}

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{mi}} &= \frac{1}{d} \left(\int_0^{x_1} \vartheta_l dx + \int_d^{x_1} \vartheta_r dx \right), \\ &= \frac{1}{d} \frac{c}{2\lambda} \left[\int_0^{x_1} \left(x_1^2 x - \frac{x^3}{3} \right) dx + \int_d^{x_1} \left(\frac{x^3}{3} - x_1^2 x \right) dx \right], \\ &= \frac{1}{d} \frac{c}{2\lambda} \left[\left(\frac{x_1^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^{x_1} + \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x_1^2 x^2}{2} \right) \Big|_d^{x_1} \right], \\ \vartheta_{\text{mi}} &= \frac{Q \cdot d}{12 \cdot \lambda}. \end{aligned} \quad (5)$$

Annahme 3 (Fig. 2): Die Anode ist nach links gerückt, so daß außerhalb der Glimmkante noch eine Zone ohne Wärmeentwicklung von der Dicke a liegt.

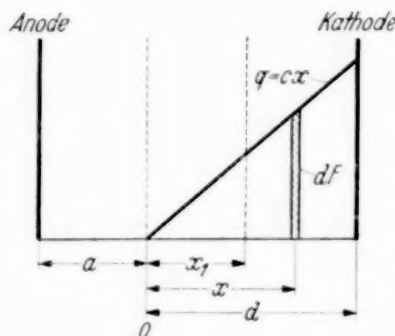


Fig. 2.

Das ist der normale Fall einer Glimmentladung.

Dann läßt sich x_1 , die Zone höchster Temperatur, folgendermaßen berechnen: dF sei in Fig. 2 ein die im Abstand x erzeugte Wärmemenge dar-

stellendes Flächenelement. Dann gelangt von dF der Bruchteil dF_a zur Anode, dF_b zur Kathode, und es ist

$$(3) \quad \frac{dF_a}{dF_b} = \frac{d-x}{a+x}; \quad \frac{dF_a}{dF_a + dF_b} = \frac{d-x}{a+d},$$

$$dF_a = \frac{dF(d-x)}{a+d}.$$

Die gesamte zur Anode gelangende Wärmemenge ist also

$$F_a = \frac{1}{a+d} \cdot \int dF(d-x).$$

(4) Wird nun mit $d-x_0$ die Abszisse des Schwerpunktes der Wärmeffläche bezeichnet, so ist

$$F(d-x_0) = \int dF(d-x),$$

$$F_a = \frac{F(d-x_0)}{a+d}.$$

Bei einer dreieckigen Wärmeffläche ist aber

$$d-x_0 = \frac{d}{3}.$$

Also ist

$$F_a = \frac{Fd}{3(a+d)}.$$

Es ist aber

$$(5) \quad F_a = \frac{cx_1^2}{2}; \quad F = \frac{cd^2}{2}.$$

Also

$$x_1^2 = \frac{d^3}{3(a+d)}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{d^3}{3(a+d)}}.$$

Zur Ermittlung der Maximaltemperatur¹⁾ bedenken wir, daß sie sich aus zwei Anteilen zusammensetzt, erstens dem Temperaturanstieg im Gebiet a . Durch dieses strömt die gesamte zwischen 0 und x_1 erzeugte Wärme $cx_1^2/2$. Also ist

$$\vartheta_0 = \frac{c}{2\lambda} x_1^2 a.$$

Zweitens muß für jede Ebene über x das Wegströmende, d. h. die Differenz des Zu- und Abströmenden gleich der Quellergiebigkeit sein, also

$$-k \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = cx,$$

¹⁾ Die folgende kurze Ableitung an Stelle einer langwierigen verdanken wir der Freundlichkeit von Herrn Prof. Toepler.

daraus folgt

$$\vartheta = \vartheta_0 + K_1 x - \frac{c}{6\lambda} x^3 \quad (\text{Fig. 3}).$$

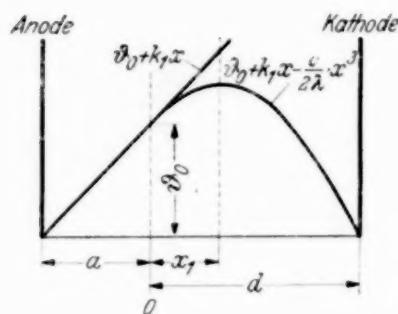


Fig. 3.

Die Grenzbedingungen zur Festlegung von K_1 ergeben sich aus der Folgerung, daß für

$$x = d \quad \vartheta = 0$$

sein soll,

$$0 = \vartheta_0 + K_1 d - \frac{c \cdot d^3}{6\lambda},$$

daraus

$$K_1 = \frac{c}{2\lambda} x_1^2, \quad \vartheta_0 = \frac{c}{2\lambda} x_1^2 a,$$

dann wird

$$\vartheta = \frac{c}{2\lambda} \left(x_1^2 (a + x) - \frac{x^3}{3} \right), \quad (6)$$

ϑ_{\max} ergibt sich, wenn $x = x_1$ gesetzt wird.

$$\vartheta_{\max} = \frac{c}{2\lambda} \left(x_1^2 (a + x_1) - \frac{x_1^3}{3} \right)$$

umgeformt.

$$\vartheta_{\max} = \frac{Qd}{9\lambda(a+d)} (3a + 2x_1). \quad (7)$$

Die mittlere Temperatur ergibt sich weiter zu

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{\text{mi}} &= \frac{c}{2\lambda} \cdot \frac{1}{(a+d)} \left[x_1^2 \frac{a^2}{2} + \int_0^d \left(x_1^2 (a+x) - \frac{x^3}{3} \right) dx \right], \\ \vartheta_{\text{mi}} &= \frac{Q}{12\lambda(a+d)} (2d(a+d) - d^2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

umgeformt.

Mit Hilfe dieser Formeln (7) und (8) seien die Temperaturen in den kathodischen Teilen einer Glimmentladung in Argon ($\lambda = 3,9 \cdot 10^{-5}$) mit einer Mg-Kathode für folgende zwei Fälle berechnet:

$$1. j = 0,5 \text{ mA/cm}^2, \quad u = 2000 \text{ Volt}, \quad Q = 0,239 \text{ cal/sec:}$$

$$a = 5,00 \text{ cm}, \quad d = 2,5 \text{ cm.}$$

Es ergibt sich mit diesen Werten:

$$x_1 = 0,833 \text{ cm}, \quad d - x_1 = 1,667 \text{ cm;}$$

$$\vartheta_{\max} = 3790^\circ \text{ C,}$$

$$\vartheta_{\text{mi}} = 2127^\circ \text{ C.}$$

$$2. j = 1 \text{ mA/cm}^2, \quad u = 2000 \text{ Volt}, \quad Q = 0,478 \text{ cal/sec:}$$

$$a = 5,9 \text{ cm}, \quad d = 1,6 \text{ cm.}$$

Es wird

$$x_1 = 0,426 \text{ cm}, \quad d - x_1 = 2,075 \text{ cm;}$$

$$\vartheta_{\max} = 5390^\circ \text{ C,}$$

$$\vartheta_{\text{mi}} = 2920^\circ \text{ C.}$$

Hierzu tritt bei den hier benutzten stärkeren Verdünnungen der Gase ($p = 0,035$ Torr) noch ein beträchtlicher Temperatursprung an den Elektroden, der die Temperatur noch weiter erhöht.

Es besteht wohl kein Zweifel darüber, daß derartige Temperaturen im Fallraum der Glimmentladung nicht entfernt in Frage kommen. Es kann also nur ein geringer Bruchteil der gesamten Kathodenfallenergie $u \cdot j$ an das Gas abgegeben werden. Um diesen zu bestimmen, wurden folgende Versuche durchgeführt.

II. Versuche zur Ermittlung der mittleren Übertemperatur im kathodischen Teil der Glimmentladung.

Als Entladungsgefäß wurde das in Fig. 4 wiedergegebene Gefäß von 7,5 cm Höhe, sowie ein sonst gleiches von nur 2,3 cm Höhe gewählt. Die Kathode bestand aus Elektrommetall (Mg mit geringen Zusätzen von Zn), die Anode aus Eisen. Elektrommetall wurde als Kathode gewählt, weil an ihm, solange es von einer Oxydschicht bedeckt ist, keine störende Kathodenzerstäubung auftritt. Da diese Oxydschicht in reinen Edelgasen allmählich weggetrommelt wird und dann eine ganz besonders starke Kathodenzerstäubung einsetzt, wurde von Zeit zu Zeit durch eine Entladung in O_2 die Oxydschicht erneuert. Die Kathode hatte Wasserkühlung, das Volumen der Eisenanode war so groß, daß sie sich während der Versuche nicht merklich erwärmte.

Die Entladungsgefäße selbst hatten keinerlei Totvolumen. Ihre Volumina betrugen 1620 und 500 cm³. In der Pumpleitung unmittelbar vor dem Gefäß befand sich ein heizbarer Pt-Draht in einem eisgekühlten Glasrohr als Pirani-Manometer. Das schädliche Volumen dieser Vorlage bis zum ersten hin betrug 166 cm³. Die Korrekturfaktoren für Druckänderungen durch Erwärmung also: 1,10 und 1,33.

Das Gefäß wurde mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt, der Hahn geschlossen, dann kurzzeitig teils mit 100, teils mit 200 mA eingeschaltet, bis das am Pirani-Manometer liegende Voltmeter zur Ruhe gekommen

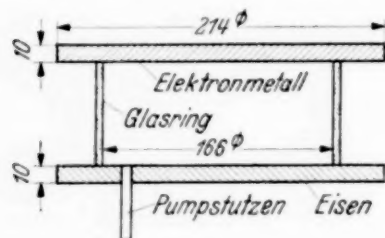


Fig. 4.

war, und dann die Ausschlagsänderung dieses Voltmeters infolge des Ausschaltens der Entladung bestimmt. Die Ausschlagsänderungen waren so klein, daß sehr sorgfältig beobachtet und mehrere Messungen gemittelt werden mußten. Aus der für jedes Gas aufgenommenen Eichkurve des

Manometers wurde der Gasdruck und die Druckänderung beim Ausschalten entnommen und daraus die mittlere Übertemperatur während der Entladung unter der einfachen Annahme berechnet, daß Gasdruck und absolute Temperatur einander proportional seien.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Die Tabelle zeigt, daß die Übertemperaturen ganz verblüffend gering sind. Bei der Berechnung der zu ihrer Erzeugung an das Gas abgegebenen Energie ist zu bedenken, daß ein wesentlicher Bruchteil dieser Energie von den Elektronen geliefert wird, die von der Kathode zur Anode fliegen. Diese Energieerzeugung ist aber nicht auf den Fallraum beschränkt, sondern im ganzen Gebiet zwischen den Elektroden die gleiche. Infolgedessen empfiehlt sich, da es sich doch nur um Übersichtsrechnungen handeln kann, die einfache Formel

$$\vartheta_{\min} = \frac{Q d}{12 \lambda} \quad (2)$$

zu benutzen, dann wird

$$Q = \frac{\vartheta_{\min} \cdot 12 \lambda}{d}.$$

Die so errechneten Q -Werte sind in Tabelle 1 eingetragen. Sie erreichen weder an der Elektronmetall- noch an der Eisenkathode den Wert von 1 % der Kathodenfallenergie $u \cdot j$. Im Mittel betragen sie 3 ‰. Mit zunehmendem Kathodenfall nehmen sie ab, offenbar, weil der Dunkelraum um so weniger Weglängen umfaßt, je höher der Kathodenfall ist.

Tabelle 1. Argon.

Gas	u Volt	p Torr	Δp Torr	$\vartheta_{\bar{u}}$ °C	$u \cdot j$ Milli- watt	Q/sec Milli- watt	Q/uj $10/100$	λ
I. Großes Gefäß: $j = 0,5 \text{ mA/cm}^2$; Kathode: Elektronmetall								
He	1040	0,041	0,001 5	1	520	0,54	1,04	$3,4 \cdot 10^{-4}$
	1440	0,0270	0,000 9	10	720	5,4	7,5	
	1830	0,0154	0,000 43	2	915	1,08	1,18	
Ne	820	0,112	0,006 9	18	410	3,14	7,6	$1,09 \cdot 10^{-4}$
	1388	0,067	0,007 6	30	694	5,23	7,6	
	1940	0,053	0,001 7	10	970	1,74	1,8	
Ar	1200	0,080	0,003 8	14	600	0,87	1,45	$3,9 \cdot 10^{-5}$
	1720	0,0737	0,003 3	13	860	0,81	0,94	
H ₂	1150	0,170	0,001 2	2	575	1,28	2,2	$4,0 \cdot 10^{-4}$
	1520	0,1178	0,000 75	5	760	3,20	4,2	
	1803	0,107	0,000 43	2	902	1,28	1,4	
Kathode Eisen: $j = 0,5 \text{ mA/cm}^2$								
Ar	2200	0,0737	0,005 9	24	1100	1,5	1,36	$3,9 \cdot 10^{-5}$
	3200	0,0570	0,003 7	18	1600	1,2	0,75	
$j = 1,0 \text{ mA/cm}^2$								
Ar	760	0,0920	0,014 5	47	760	2,93	3,9	$3,9 \cdot 10^{-5}$
	1300	0,0724	0,008 1	33	1300	2,06	1,6	
	1780	0,0754	0,003 4	13	1780	0,81	0,46	
	2250	0,0742	0,001 9	8	2250	0,50	0,22	
II. Kleines Gefäß: $j = 1 \text{ mA/cm}^2$; Kathode: Elektronmetall								
Ar	220	0,279	0,005 2	6	220	1,22	5,5	$3,9 \cdot 10^{-5}$
	400	0,164	0,002 9	5	400	1,02	2,5	
	580	0,111	0,001 6	4	580	0,81	1,4	
He				nicht meßbar				

Zu dem erhaltenen Ergebnis sei vorweg bemerkt, daß noch eine zweite Methode entwickelt wurde, mittels deren die Übertemperatur in einer beliebigen Ebene des Dunkelraums bestimmt werden kann. Ein sehr dünner Pt-Draht wird quer durch den Dunkelraum in einer Äquipotentialfläche gespannt und dann diejenige Temperatur des Drahtes ermittelt, bei welcher er vom Gas weder gekühlt noch erwärmt wird. Dann hat er die Temperatur des Gases, wenn er nicht durch Aufprall oder Neutralisierung von Elektronen oder Ionen zusätzlich erhitzt wird. Es kann sich also auf diese Weise nie eine zu niedrige, wohl aber eine zu hohe Temperatur ergeben. Diese Versuche, über die an anderer Stelle ausführlich berichtet werden wird, ergaben für He bei einer Dunkelraumdicke $d = 2,2 \text{ cm}$, einem Elektroden-

abstand von 12,5 cm, bei 100 mA und 1200 Volt an der heißesten Stelle eine Übertemperatur von 22° C, und für Wasserstoff bei 3,0 cm Fallraum, dem gleichen Elektrodenabstand, 100 mA und 1300 Volt an der heißesten Stelle eine Übertemperatur von 33° C. Daraus folgen als mittlere Übertemperaturen des Entladungsgefäßes etwa 13 und 18° C.

Wird berücksichtigt, daß diese Werte aus den angegebenen Gründen zu hoch sind, und daß der Elektrodenabstand hier wesentlich größer war, was ebenfalls die Temperatur erhöht, so ergeben sich auch nach dieser Methode die gleichen geringfügigen Gaserwärmungen, wie nach der in dieser Veröffentlichung behandelten.

III. Folgerungen aus den Versuchen.

Wird nun noch berücksichtigt, daß ein wesentlicher Bruchteil dieser so geringfügigen Energieabgabe an das Gas noch von Elektronen herrührt, so folgt:

1. Die Energiemengen, die die Kationen bei anomalem Kathodenfall von der Größenordnung 1000 Volt im Fallraum an das Gas abgeben, sind so gering, daß sie bei der Ermittlung der an die Kathode abgegebenen Energie nicht einmal als Korrektur berücksichtigt zu werden brauchen.

2. Ist ε_e die Aufprallenergie, ε_r die Reflexionsenergie und ε_w die der Kathodentemperatur entsprechende Energie eines auf die Kathode aufprallenden und als neutrales Molekül reflektierten Ions, so nennen Compton und von Voorhis¹⁾

$$\alpha = \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_r}{\varepsilon_e - \varepsilon_w}$$

den Akkommodationskoeffizienten des Vorganges.

$\alpha = 1$ bedeutet dann, daß die gesamte Aufprallenergie an die Kathode abgegeben wird; $\alpha = 0$, daß sie völlig wieder in den Gasraum mitgenommen wird.

Da nun diese Reflexionsenergie eines neutralen in den Gasraum zurückfliegenden Moleküls das Gas erwärmen würde, muß jedenfalls bei den Kathodenfällen der Tabelle 1 der Akkommodationskoeffizient α gleich 1 sein.

IV. Versuch einer Erklärung der geringen Übertemperatur.

1. Aus Versuchen über die Energieabgabe an die Kathode, über die an anderer Stelle berichtet werden wird, folgt, daß in Ar bei 2000 Volt,

¹⁾ W. Compton u. van Voorhis, Phys. Rev. **35**, 1438, 1930; **37**, 1596, 1931.

0,5 mA/cm² Stromdichte und 2,5 cm Dunkelraumdicke der Strom an einer Mg-Kathode nur etwa zu 27,5 % aus Ionenstrom, zu 72,5 % aus Elektronenstrom besteht. Das ergibt den Faktor 0,275.

2. Die Stöße der Kationen im Fallraum auf die Gasmoleküle unterscheiden sich von gewöhnlichen gaskinetischen Zusammenstößen dadurch, daß sie sämtlich die gleiche Richtung haben. Also hat die angegebene Stoßenergie ebenfalls eine Vorzugsrichtung zur Kathode hin, die auch bei den weiteren Stößen nicht verschwindet. Also wird von den bei den Zusammenstößen abgegebenen Energien immer noch ein merklicher Bruchteil unmittelbar auf die Kathode übertragen. Ich hatte seinerzeit Frl. Iris Runge gebeten, dieses Problem durchzurechnen. Sie kam zu folgendem Ergebnis¹⁾:

Tabelle 2.

Zahl der Ionenweglängen	Zur Kathode gelangender Energiebruchteil	Zahl der Ionenweglängen	Zur Kathode gelangender Energiebruchteil
6	> 94 %	15	> 70 %
10	> 80 %	30	> 55 %

Das >-Zeichen bedeutet, daß die angegebenen Werte *etwas* zu klein sind. In dem angegebenen Beispiel beträgt der Gasdruck 0,035 Torr, die Zahl der gaskinetischen Ionenweglängen schneller (12!) Ionen $1,85 : 0,2 = 9,25$.

Es gehen also schätzungsweise 85 % der Kationenenergie zur Kathode, 15 % bleiben im Gas. Das gibt den Faktor 0,15.

3. Es ist bekannt, daß beim Kationenstoß häufig Umladungen vorkommen. D. h. das stoßende Kation überträgt auf das gestoßene Molekül nicht nur seine Energie, sondern auch seine Ladung. Dieses wirkt bei zentralem Stoß so, als ob überhaupt kein Stoß stattgefunden hätte, sondern die Weglänge die doppelte wäre. Wird angenommen, daß durch diesen Effekt die Zahl der Ionenweglängen sich von 9,25 auf 5 verringert, so sinkt der unter 2 aufgeführte Faktor nach Tabelle 2 auf etwa 0,05.

4. *Ergebnis*: Die Multiplikation dieses Faktors mit dem Faktor Nr. 1 ergibt $0,05 \times 0,275 = 0,0137$. Wird die im Beispiel 1 errechnete mittlere Übertemperatur von 2127° C mit diesem Faktor multipliziert, so ergibt sich $\vartheta_{\bar{u}} = 28,7^\circ \text{C}$, d. h. die richtige Größenordnung. Es braucht nur noch angenommen zu werden, daß der Umladungseffekt etwas wirksamer ist,

¹⁾ I. Runge, ZS. f. Phys. **61**, 174, 1930.

als oben vorausgesetzt, so daß er die freie Weglänge etwa auf das Vierfache vergrößert; dann kann die auf den ersten Blick so verblüffende geringe Übertemperatur auch quantitativ erklärt werden.

V. Ausblick.

Durch dieses Ergebnis wird der Weg zu verschiedenen wichtigen Untersuchungen frei. Erstens kann jetzt die unmittelbar auf die Kathode durch Kationenstoß übertragene Energie thermisch ohne weiteres bestimmt werden. Zweitens kann aus dieser Bestimmung das Verhältnis Kationenstrom : Elektronenstrom an der Kathode ermittelt werden. Drittens kann diese wahre Aufprallenergie zur Kathodenzerstäubung in Beziehung gesetzt werden, und durch Konstanthalten der Temperatur der Kathode definierte Verhältnisse geschaffen werden, da jetzt feststeht, daß im Gasraum keine störende von Gas zu Gas verschiedene Übertemperatur auftritt.

Versuche über diese Erscheinungen sind im Gange und werden demnächst mitgeteilt werden.

[Aus der Physikalischen Abteilung des Allgemeinen Instituts
gegen die Geschwulstkrankheiten im Rudolf-Virchow-Krankenhaus Berlin
(Direktor: Prof. Dr. H. Cramer; Abteilungsleiter: E. Hasché).]

Kosmische Ultrastrahlung und Meteortätigkeit.

Von **Johannes Zirkler.**

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 7. September 1937.)

Die Hypothese eines Zusammenhanges zwischen Ultrastrahlung und Meteortätigkeit wird an Hand neuerer Beobachtungen verschiedener Forscher erörtert.

Gelegentlich der Fortsetzung meiner Arbeiten über $\text{ThC}''^{1)}$ fanden sich bei genauerer Untersuchung des Elektrometerselbstablaufs, dessen genaue Kenntnis bei obigen Arbeiten unerlässlich ist, bestimmte Erscheinungen, die nur auf extraterrestrische Einflüsse zurückführbar waren (Ultrastrahlung). Weitere Messungen wiesen auf Zusammenhänge mit der Meteorhäufigkeit hin, so daß der Gedanke eines direkten Einflusses der Meteorschauer auf die Ultrastrahlung nahegelegt wurde ²⁾.

Nach freundlicher Mitteilung von Regener ist ein Zusammenhang zwischen Ultrastrahlung und Meteorhäufigkeit schon 1931 von Zehnder³⁾ in seiner Arbeit „Radiation des espaces interstellaires et processus cosmiques“ aus theoretischen Erwägungen abgeleitet worden. Im folgenden wurden die Ultrastrahlenmessungen von Corlin⁴⁾ einer diesbezüglichen Bearbeitung unterzogen. Die wichtigsten Messungen sind in Fig. 1 graphisch dargestellt worden.

Aus dem Material kann man die Zugehörigkeit von Intensitätshöchstwerten zu bestimmten Meteorschauern zum Teil ableiten. Es ist für eventuell vorliegende Zusammenhänge nicht unwichtig, daß dies Material einerseits nach Corlin Beziehungen zwischen Ultrastrahlung und Sonnenaktivität ergibt, aber auch meiner Ansicht nach einen Hinweis auf Einflüsse der Meteortätigkeit! So fällt der Kurvenanstieg bei Vollpanzermessungen vom 14. bis 23. Oktober 1932 mit der Tätigkeit des Orionidenschwarmes zusammen, die Halbpanzermessungen zeigen vom 25. Oktober bis 8. November einen merklichen Abfall und steigen wiederum bis 14. November

¹⁾ J. Zirkler, ZS. f. Phys. **89**, 439, 1934; **93**, 477, 1935. — ²⁾ J. Zirkler, Naturwiss. **25**, 367, 1937. — ³⁾ Ann. de Guebhard Séverine, 7. année, 1931. —

⁴⁾ A. Corlin, Cosmic Ultra-Radiation in Northern Sweden, Ann. of the Observatory of Lund, Nr. 4.

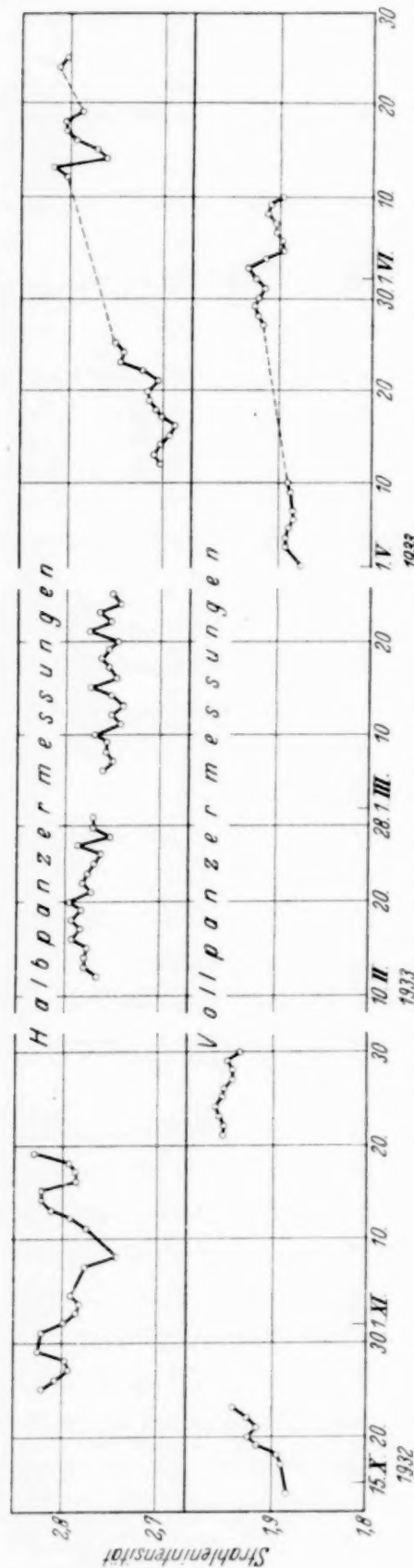


Fig. 1. Tagesmittel der Ultrastrahlungsintensität nach A. Corlin, 1932–1933.

an, wenn der Leonidenschwarm tätig ist: ganz allgemein läßt sich sagen, daß sowohl die Halbpanzer- wie auch die Vollpanzermessungen eine erhöhte Strahlenintensität zur Zeit erhöhter Meteortätigkeit (Oktober bis Dezember) und ein Minimum zur Zeit schwacher Meteortätigkeit (März bis Mai) aufweisen.

Besonders auffallend ist der Anstieg der Intensität von Ende Mai bis Mitte Juni um nahezu 5%. Denn Clay¹⁾ fand 1936 fast zur selben Zeit, nämlich vom 21. Mai bis 6. Juni, eine Erhöhung der Ultrastrahlung um 10%, die erst gegen Ende Juni abklang. Diese Erhöhung wurde auch von anderer Seite bestätigt. Es ist in diesem Zusammenhang von Bedeutung, daß vom 24. Mai bis 19. Juni 1930 in Japan²⁾ zahlreiche Meteore beobachtet wurden, die man mit dem Kometen 1930 d in Verbindung zu bringen suchte. Ferner berichtet Hoffmeister³⁾ über abnorme Helligkeit des Nachthimmels am 20. Juni 1936, sowie über das Auftreten von Leuchtstreifen am 15., 17., 19. und 21. Mai 1936, die bekanntlich in vielen Fällen an die Stelle von Meteor- oder Kometerscheinungen treten. In seinem Buche „Die Meteore“ gibt Hoffmeister S. 120 für die Zeit vom 18. bis 30. Juni eine periodisch wiederkehrende, merkbliche Steigerung der Helligkeit des Nachthimmels an. Erwähnt sei ferner, daß am 26. Mai

¹⁾ Proc. Amsterdam **39**, 813, 1936. — ²⁾ Nature **126**, 2, S. 146. London 1930. — ³⁾ Mitteilungen der Sternwarte zu Sonnenberg, Nr. 32.

1932 ein Schauer von Meteorsteinen in Westsibirien niederging¹⁾, und daß ferner Hoffmeister und Richter auf ihrer Forschungsfahrt am 3. Juni 1933 erhöhte Meteorzahl und Leuchtstreifen beobachteten²⁾.

Nimmt man an, daß die Erscheinung der *Ionosphäre* durch Ultrastrahlen hervorgerufen wird, so lassen sich auch hier Zusammenhänge zwischen Ultrastrahlen und Meteortätigkeit ableiten. So fanden zur Zeit der November-Leoniden Schafer und Goodall³⁾ erhöhte Ionisation der *E*-Schicht im Jahre 1931, in der Nacht vom 13. zum 14. November 1933 Mitra und Ghose⁴⁾ hohe Ionisation, ferner neuerdings Bhar⁵⁾ in der Nacht vom 14. zum 15. November 1936 eine starke Erhöhung der Ionisation der *E*-Schicht der Ionosphäre.

Alle diese Beobachtungen deuten auf einen nahen Zusammenhang zwischen Ultrastrahlung und Meteortätigkeit hin.

Berlin, den 1. August 1937.

¹⁾ Nature, London 1933, S. 978. — ²⁾ Mitteilungen der Sternwarte zu Sonnenberg, Nr. 26. — ³⁾ Proc. Inst. Radio Eng. **20**, 1941, 1932. — ⁴⁾ Nature, London 1934. — ⁵⁾ Indian Journ. of the Physics XI, Part II, 1937.

Berechnung der wichtigsten Konstanten des metallischen Strontiums und Bariums.

Von **Paul Gombás** und **Gyula Péter** in Budapest.

(Eingegangen am 14. Oktober 1937.)

Es werden mit Hilfe einer statistischen Näherungsmethode ohne Zuhilfenahme empirischer oder halbempirischer Parameter die Gitterkonstante, Gitterenergie und Sublimationswärme des metallischen Strontiums und Bariums berechnet. Die Resultate stimmen mit den empirischen Konstanten sehr gut überein.

In dieser Arbeit wenden wir die von einem von uns beiden in einigen früheren Arbeiten entwickelte statistische Methode¹⁾ zur Berechnung der Gitterkonstante, Gitterenergie und Sublimationswärme der Erdalkalimetalle Strontium und Barium an. Die Erdalkalimetalle wurden mit dieser Methode schon in einer früheren Arbeit behandelt (l. c. II), dort wurden jedoch in der Gitterenergie einige Energieterme, deren Betrag sich als von höherer Ordnung klein erwies, vernachlässigt, so daß die dort erhaltenen Resultate nur eine erste Näherung darstellen. Unser Ziel ist hier, die wichtigsten Konstanten des metallischen Strontiums und Bariums in höherer Näherung zu berechnen, was bedeutet, daß wir in der Gitterenergie auch diejenigen Glieder berücksichtigen, welche von höherer Ordnung klein sind und welche wir in l. c. II vernachlässigten.

Bezüglich unserer Methode verweisen wir auf die zitierten Arbeiten hauptsächlich auf l. c. I und II und geben hier nur die wichtigsten Grundlagen der Methode an. Wir denken uns die Erdalkalimetalle aus zweifachen Ionen und dem Elektronengas der Metallelektronen aufgebaut. Die Verteilung der Metallelektronen setzen wir als konstant an. In den Gebieten außerhalb des Atomrumpfes ist dies wie aus den Berechnungen von Fröhlich²⁾ hervorgeht, eine gute Näherung. Im Innern des Atomrumpfes ist natürlich die Verteilungsfunktion der Metallelektronen von einem konstanten Wert wesentlich verschieden und zeigt starke Schwankungen, diese dürften jedoch im Mittel wie aus unseren Rechnungen hervorgeht, durch eine Konstante ziemlich gut approximiert werden. Die Dichte ρ des Metallelektronengases erhält man sehr einfach. Wir umgeben analog zu Wigner und Seitz³⁾

¹⁾ P. Gombás, ZS. f. Phys. **94**, 473, 1935; **95**, 687, 1935; **99**, 729, 1936, im folgenden als I zitiert; **100**, 599, 1936; **104**, 81, 1936; **104**, 592, 1937 im folgenden als II zitiert. — ²⁾ H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle, Struktur und Eigenschaften der Materie, Bd. XVIII. Berlin 1936. S. 279. — ³⁾ E. Wigner u. F. Seitz, Phys. Rev. (2) **43**, 804, 1933.

jedes Ion mit einer Kugel vom Radius r_s , deren Volumen dem Atomvolumen gleich ist. Wenn wir beachten, daß das Metallelektronengas pro Ion zwei Elektronen enthält, so folgt

$$\varrho = \frac{2}{\frac{4\pi r_s^3}{3}} = \frac{6}{4\pi} \frac{1}{r_s^3}. \quad (1)$$

Unser Ziel ist die Berechnung der Gitterenergie, da man aus dieser alles weitere sehr einfach erhält. Dabei braucht man, wie Wigner und Seitz zeigten¹⁾, nur die Energie einer Elementarkugel zu berechnen, welche sogleich die Gitterenergie pro Ion gibt. Die Gitterenergie setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen. Zunächst aus der Energie U_c , welche die Summe der Coulombschen Wechselwirkungsenergie der zunächst punktförmig gedachten Ionenladung mit dem Metallelektronengas und die gegenseitige Coulombsche Wechselwirkungsenergie der Metallelektronen ist. Es wird also

$$U_c = - \int_{\tau} \frac{2\varepsilon^2}{r} \varrho \, d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \Phi \varrho \varepsilon \, d\tau, \quad (2)$$

wo ε die positive Elementarladung, r die Entfernung vom Kern, $d\tau$ das Volumenelement und τ das Volumen der Elementarkugel bezeichnet. Φ ist das Potential des Metallelektronengases der Elementarkugel, für welches man erhält

$$\Phi = -2\pi \varrho \varepsilon \left(r_s^2 - \frac{r^2}{3} \right). \quad (3)$$

Da alles kugelsymmetrisch ist, kann man die obigen Integrale sehr einfach berechnen, es ergibt sich

$$U_c = - \frac{18 \varepsilon^2}{5} \frac{1}{r_s}. \quad (4)$$

Als weitere Anteile der Gitterenergie ziehen wir die Fermische Nullpunktsenergie U_F und die Austauschenergie U_A in Betracht, welche die folgenden sind:

$$U_F = \frac{3\pi^2}{10} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \varepsilon^2 a_H \int_{\tau} \varrho^{5/3} \, d\tau = \frac{3,5080 \varepsilon^2 a_H}{r_s^2}, \quad (5)$$

$$U_A = - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \varepsilon^2 \int_{\tau} \varrho^{4/3} \, d\tau = - \frac{1,1545 \varepsilon^2}{r_s}, \quad (6)$$

wo a_H den ersten H-Radius bedeutet.

¹⁾ E. Wigner u. F. Seitz, Phys. Rev. (2) **43**, 804, 1933.

Aus der Wechselwirkung der Metallelektronen entsteht, wie Wigner und Seitz zeigten¹⁾, noch eine Energie, welche der Korrelation der Orte der Elektronen mit antiparallelem Spin Rechnung trägt. Die Berechnung dieser Energie ist ziemlich kompliziert, man kann sie jedoch für Erdalkalimetalle in guter Näherung durch folgende einfache Näherungsformel darstellen:

$$U_K = - \frac{0,584}{5,1 + \frac{r_s}{2^{1/3} a_H}} \frac{\varepsilon^2}{a_H}. \quad (7)$$

Wenn das Metall aus punktförmigen Ionen bestünde, so hätten wir bei der Berechnung der Gitterenergie nur die Energien U_C , U_F , U_A und U_K in Betracht zu ziehen. Die Ionen sind jedoch nicht punktförmig, sondern haben eine räumliche Ausdehnung, welche durch ihre Elektronenwolken bedingt ist. Demzufolge hat man bei der Berechnung der Gitterenergie noch weitere Energieterme zu berücksichtigen, welche dadurch entstehen, daß das Metallelektronengas in den Atomrumpf eindringt. Diese Energieterme berechnen wir statistisch und behandeln auch den Rumpf statistisch, indem wir für die Verteilung der Rumpfelektronen die statistische Funktion von Lenz²⁾ und Jensen³⁾ gebrauchen. Bezüglich dieser verweisen wir auf die Originalarbeiten. Die von Lenz und Jensen gegebene statistische Elektronenverteilung und das dieser entsprechende Potential geben in den äußeren Gebieten der zweifachen Ionen Sr^{++} und Ba^{++} nur eine grobe Näherung in den inneren Gebieten der Ionen dürften sie jedoch noch eine brauchbare Näherung darstellen. Da es bei den folgenden Energietermen hauptsächlich auf die letzteren Gebiete ankommt, können wir für den Rumpf die Lenz-Jensensche Näherung gebrauchen. Die Energieterme, welche daraus resultieren, daß das Metallelektronengas in die Atomrümpfe eindringt, sind die folgenden.

Zunächst die elektrostatische Energieverminderung

$$W_E = - \int \left(\psi + \varphi - \frac{2\varepsilon}{r} \right) \rho \varepsilon d\tau, \quad (8)$$

wo ψ das Potential des Kernes und φ das Potential der Elektronenwolke des Ions bedeuten.

Dann die Erhöhung der kinetischen Elektronenenergie

$$W_F = \frac{3\pi}{40} \left(\frac{3}{4\pi^2} \right)^{2/3} \varepsilon^{1/3} a_H \int \{ [\Delta\varphi + \Delta\Phi]^{5/3} - [(\Delta\varphi)^{5/3} + (\Delta\Phi)^{5/3}] \} d\tau, \quad (9)$$

¹⁾ E. Wigner u. F. Seitz, Phys. Rev. (2) **46**, 509, 1934; E. Wigner, ebenda (2) **46**, 1002, 1934. — ²⁾ W. Lenz, ZS. f. Phys. **77**, 713, 1932. — ³⁾ H. Jensen, ebenda **77**, 722, 1932.

wo Δ den Laplaceschen Operator bezeichnet, also $\Delta \varphi/4\pi\epsilon$ die Elektronendichte des Ions und $\Delta \Phi/4\pi\epsilon = \varrho$ ist. Wenn man in Betracht zieht, daß im Innern des Ions $\Delta \varphi > \Delta \Phi$ in den äußeren Gebieten $\Delta \varphi < \Delta \Phi$ ist, so kann man diesen Ausdruck durch eine Reihenentwicklung vereinfachen, wodurch man erhält

$$W_F = \frac{3\pi^2}{10} \left(\frac{3}{4\pi^2} \right)^{2/3} \epsilon^{1/3} a_H \left\{ \frac{5}{3} \Delta \Phi \int_0^{r_0} (\Delta \varphi)^{2/3} r^2 dr - \frac{1}{3} (\Delta \Phi)^{5/3} r_0^3 + \frac{5}{3} (\Delta \Phi)^{2/3} \int_{r_0}^{\infty} \Delta \varphi r^2 dr - \int_{r_0}^{\infty} (\Delta \varphi)^{5/3} r^2 dr \right\}, \quad (10)$$

wo r_0 denjenigen Radius bezeichnet, für welchen

$$\Delta \varphi(r_0) = \Delta \Phi(r_s) \quad (11)$$

ist.

Die Integration ist in (8) und (9) auf den ganzen Raum auszudehnen.

Alle weiteren Energieterme, so z. B. die in den früheren Arbeiten mit W_A bezeichnete Energie, welche der Austauschwechselwirkung der Metallelektronen mit dem Atomrumpf Rechnung trägt und diejenigen Energieterme, welche aus der Wechselwirkung der Rumpfe resultieren, sind bei den Erdalkalimetallen sehr klein und können vernachlässigt werden.

Wir erhalten also für die Gitterenergie U pro Ion

$$U = U_C + U_F + U_A + U_K + W_E + W_F. \quad (12)$$

Die Rechnungen wurden mit diesem Ausdruck durchgeführt, wobei wir für W_F die Formel (10) gebrauchten.

Die Berechnungen haben wir für Sr und Ba durchgeführt, da man annehmen kann, daß die Lenz-Jensensche statistische Verteilung für die elektronenreichen Ionen dieser Metalle noch eine brauchbare Näherung gibt. Die numerischen Resultate stehen in den Tabellen 1 und 2 in ϵ^2/a_H Einheiten.

Tabelle 1. Resultate für Sr.

r_s	4,0 a_H	4,2 a_H	4,3 a_H	4,4 a_H	4,5 a_H	4,6 a_H	4,8 a_H
U_C	-0,90000	-0,85714	-0,83721	-0,81818	-0,80000	-0,78261	-0,75000
U_F	+0,21925	+0,19887	+0,18972	+0,18120	+0,17323	+0,16579	+0,15226
U_A	-0,28863	-0,27488	-0,26850	-0,26239	-0,25656	-0,25098	-0,24052
U_K	-0,07057	-0,06925	-0,06860	-0,06797	-0,06735	-0,06674	-0,06547
W_E	-0,50672	-0,43772	-0,40789	-0,38071	-0,35588	-0,33318	-0,29324
W_F	+0,88071	+0,76785	+0,71873	+0,67381	+0,63243	+0,59436	+0,52693
U	-0,66596	-0,67227	-0,67375	-0,67424	-0,67413	-0,67336	-0,67004

Tabelle 2. Resultate für Ba.

r_s	4,5 a_H	4,7 a_H	4,8 a_H	4,9 a_H	5,0 a_H	5,1 a_H	5,4 a_H
U_C	-0,80000	-0,76596	-0,75000	-0,73469	-0,72000	-0,70588	-0,66667
U_F	+0,17323	+0,15881	+0,15226	+0,14611	+0,14032	+0,13487	+0,12030
U_A	-0,25656	-0,24564	-0,24052	-0,23561	-0,23090	-0,22637	-0,21380
U_K	-0,06735	-0,06614	-0,06547	-0,06497	-0,06440	-0,06384	-0,06222
W_E	-0,43386	-0,38079	-0,35749	-0,33604	-0,31628	-0,29804	-0,25108
W_F	+0,77439	+0,68257	+0,64231	+0,60611	+0,57238	+0,54138	+0,46076
U	-0,61015	-0,61715	-0,61891	-0,61909	-0,61888	-0,61788	-0,61271

Der stabilen Gleichgewichtslage entspricht das Minimum von U . Mit Hilfe einer graphischen Interpolation erhält man, daß dieses bei folgenden Werten liegt

für Sr bei $R = 4,42 a_H$,

für Ba bei $R = 4,90 a_H$.

wobei wir den der Gleichgewichtslage entsprechenden Radius r_s mit R bezeichneten.

Der Betrag von U bei $r_s = R$ gibt die Gitterenergie in der Gleichgewichtslage U_0 , welche wir ebenfalls graphisch ermittelten, wobei man erhält

für Sr $U_0 = 0,67430 \varepsilon^2/a_H$,

für Ba $U_0 = 0,61909 \varepsilon^2/a_H$.

Aus U_0 kann man sehr einfach die Sublimationswärme S aus folgender Beziehung berechnen

$$S = U_0 - J_1 - J_2,$$

wo J_1 und J_2 die empirisch bestimmte erste bzw. zweite Ionisierungsenergie des freien Erdalkaliatoms bedeutet.

Die Endresultate sind in der Tabelle 3 zusammengestellt, wobei R in Å-Einheiten, U_0 , S , J_1 und J_2 in Kilogrammkalorien pro Mol angegeben sind. Zum Vergleich sind in der Tabelle 3 auch die entsprechenden empirischen Konstanten¹⁾ angeführt. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den berechneten und empirischen Konstanten sehr gut, besonders wenn man beachtet, daß wir in die Rechnungen keinerlei empirische oder halbempirische Parameter einführten. Die Resultate der vorliegenden Arbeit, welche, wie erwähnt, eine zweite Näherung darstellen, nähern erwartungsgemäß die empirisch bestimmten Konstanten bedeutend besser an als die Resultate der ersten Näherung der Arbeit I. c. II.

¹⁾ Bezüglich dieser verweisen wir auf I. c. II, wo angegeben ist, aus welchen Arbeiten diese entnommen sind.

Tabelle 3.

	Theorie			Experiment				
	R	U_0	S	R	U_0	S	J_1	J_2
Sr	2,35	420,5	36,4	2,37	423,3	39,2	130,8	253,3
Ba	2,61	386,1	36,9	2,47	388,4	39,2	119,7	229,5

Wir möchten noch kurz die Genauigkeit unserer Methode besprechen. Unsere Methode ist eine Näherungsmethode und zwar besteht die Näherung hauptsächlich in drei Punkten. Erstens setzten wir ϱ als konstant an, zweitens gebrauchten wir zur Berechnung der Fermi-Energie des Metallelektronengases die einfache Formel (5), und drittens berechneten wir die kinetische Energieerhöhung der Valenzelektronen durch den statistischen Näherungsausdruck (9) bzw. (10). Außerdem ist auch die Energie U_K nur bis auf 20% genau bekannt. Die außerordentlich gute Übereinstimmung der berechneten Konstanten mit den experimentell bestimmten ist teilweise bestimmt darauf zurückzuführen, daß sich die durch unsere Näherung bedingten Fehler kompensieren. Restlos kann jedoch die gute Übereinstimmung daraus nicht erklärt werden und ist nach unserer Meinung wohl auch darauf zurückzuführen, daß unsere Methode die wahren Verhältnisse gut annähert und daß die Verteilung der Metallelektronen durch eine Konstante approximiert werden kann.

Budapest, Institut für theoretische Physik der Universität, Sept. 1937.

Über die Grenzleistung von Dimensionsbetrachtungen.

Von E. Fues in Breslau.

(Eingegangen am 18. Oktober 1937.)

Es ist bekannt, daß Dimensionsbetrachtungen um so ergiebiger sind, je mehr Grundgrößen man der Dimensionsbestimmung zugrunde legt; daß andererseits die fruchtbare Einführung neuer Grundgrößen eine Grenze hat in der natürlichen Bestimmtheit des Problems. Es fehlte eine Regel, die von vornherein abschätzen läßt, bis zu welcher Höchstzahl neue Grundgrößen wirksam eingeführt werden können. Diese Regel wird hier angegeben: Die Grundgleichungen des Problems erlauben, die Höchstzahl der wirksamen Grundgrößen abzuzählen.

Durch das Büchlein von P.W.Bridgman¹⁾ sind die wesentlichen Schritte systematischer Dimensionsbetrachtungen klargelegt worden: Um zwischen den Maßzahlen g_r von n abgeleiteten Größen $G_1 \dots G_n$ eine maßstabsunabhängige physikalische Beziehung zu finden, hat man ihre „Dimensionen“

$$[G_r] = \gamma_1^{\delta_{r1}} \dots \gamma_m^{\delta_{rm}} \quad (1)$$

in den m Grundgrößen $I_1 \dots I_m$ aufzustellen und hat aus ihnen alle möglichen dimensionslosen Potenzprodukte

$$\pi^{(j)} = [G_1]^{\alpha_1^{(j)}} \dots [G_n]^{\alpha_n^{(j)}} = \gamma_1^{\sum \alpha_r^{(j)} \delta_{r1}} \dots \gamma_m^{\sum \alpha_r^{(j)} \delta_{rm}}$$

mit

$$\sum_r \alpha_r^{(j)} \delta_{r\mu} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

aufzustellen; ihre Anzahl sei z . Dann kann die gesuchte Beziehung nach dem π -Theorem nur von der Form sein

$$F(\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(z)}) = 0, \quad (2)$$

oder von einer ihr äquivalenten Form, die man z. B. erhält, wenn man (wie üblich) nach einem $\pi^{(j)}$ oder der darin vorkommenden Größe g_r auflöst.

Um diese Folgerung möglichst ergiebig zu gestalten, d. h. die Funktion F soweit wie irgend möglich einzuschränken, muß man anstreben, die Zahl z zu erniedrigen. Wenn nun in der Matrix der Exponenten $\delta_{r\mu}$ die höchste nicht verschwindende Determinante vom Rang m ist [was bedeutet, daß die m Grundgrößen wirklich in m unabhängigen Kombinationen

¹⁾ Theorie der physikalischen Dimensionen, deutsch von H. Moll, Leipzig und Berlin, Teubner, 1932.

in die Dimensionen (1) eingehen], so ist $z = n - m$; ist dagegen der höchste Rang einer nicht verschwindenden Determinante $|\delta_{ru}|$ gleich $(m - r)$, so ist

$$z = n - m + r^1). \quad (3)$$

Die Wahl der G_r , also n , ist durch das Problem bestimmt; ebenso ihre dimensionelle Abhängigkeit von irgendwelchen I_μ ; über n und r kann also nicht frei verfügt werden. Dagegen steht von vornherein völlig frei, welche Größen man als Grundgrößen erklären will. Man wird also versuchen, durch Steigerung von m die Zahl z zu erniedrigen; doch kann das wirksam nur bis zu einer Höchstzahl \hat{m} geschehen, weil ja sonst alle physikalischen Beziehungen die Form $\pi = \text{Zahl} = c$ oder

$$g_1 = c^{\frac{1}{a_1}} g_2^{\frac{a_2}{a_1}} \dots g_n^{\frac{a_n}{a_1}}$$

haben müßten — im Widerspruch mit der Erfahrung!

Wie groß ist \hat{m} oder wann muß ich mit dem Versuch aufhören, durch Einführung neuer Grundgrößen vielleicht doch noch mehr Auskunft über F zu erlangen?

Zwei Beispiele aus der Hydrodynamik mögen diese Fragestellung erläutern: Wir untersuchen, zunächst in den üblichen CGS-Grundgrößen, erstens den Strömungswiderstand W einer Kugel vom Radius a in einer Flüssigkeit der Dichte ρ , Zähigkeit μ , Schallgeschwindigkeit c (als Maß der Kompressibilität), die mit einer Geschwindigkeit V stationär gegen sie anströmt.

Die Dimensionen der sechs bezogenen Größen in den drei Grundgrößen mlt sind:

$$[W] = mlt^{-2}; \quad [a] = l; \quad [\rho] = ml^{-3}; \quad [\mu] = ml^{-1}t^{-1}; \quad [c] = [V] = lt^{-1}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist $r = 0$. Man erhält also $6 - 3 = 3$ dimensionslose Produkte

$$\pi^{(1)} = \frac{W}{\rho V^2 a^2}; \quad \pi^{(2)} = \frac{\rho V a}{\mu} = R; \quad \pi^{(3)} = \frac{V}{c}$$

und das Ergebnis

$$W = \frac{\rho}{2} V_1^2 \pi a^2 \cdot \varphi\left(R, \frac{V}{c}\right). \quad (4)$$

¹⁾ Z. B. wird $r = 1$, wenn bei einer Dimensionsbetrachtung in den üblichen CGS-Grundgrößen mlt l und t immer nur in der Verbindung (lt^{-1}) vorkommen (also gar nicht als zwei verschiedene Grundgrößen eingehen), wenn dagegen m von ihnen unabhängig einmal als m (lt^{-1}), ein andermal als m^2 (lt^{-1}) auftritt usf. Solche Rangerniedrigungen sind praktisch ziemlich häufig, weshalb bei sorgfältigen Dimensionsbetrachtungen der Wert r immer nachgeprüft werden muß.

Zweitens fragen wir nach der *Fallgeschwindigkeit* V derselben Kugel in derselben Flüssigkeit, wenn die Dichte der Kugel um $\Delta \varrho$ größer als die der Flüssigkeit und wenn a oder $\Delta \varrho$ so klein ist, daß die Umströmung „schleichend“ und das Fallen der Kugel stationär erfolgt. Dann nehmen die Trägheitskräfte an dem Gleichgewicht zwischen Schwere $\frac{4}{3} \pi a^3 \Delta \varrho \cdot g$ und Flüssigkeitsreibung nicht teil. Man hat also jetzt dimensionslose Produkte zu bilden aus folgenden Dimensionen:

$$[V] = lt^{-1}; \quad [a] = l; \quad [\Delta \varrho] = ml^{-3}; \quad [\mu] = ml^{-1}t^{-1}; \quad [g] = lt^{-2}.$$

Da wieder $r = 0$, so erhält man $5 - 3 = 2$ dimensionslose Produkte

$$\pi^{(1)} = \frac{V \mu}{a^2 g \Delta \varrho} \quad \text{und} \quad \pi^{(2)} = \frac{\Delta \varrho^2 g a^3}{\mu^2}.$$

Die gestellte Frage kann also zunächst nur bis zu dem Ergebnis

$$V = \frac{a^2 g \Delta \varrho}{\mu} \varphi \left(\frac{\Delta \varrho^2 g a^3}{\mu^2} \right) \quad (5)$$

beantwortet werden.

Allein durch Einführung der *Kraft* als weiterer Grundgröße, also indem man alle Dimensionen auf direkte Messungen der vier Größen $m l t k$ bezieht, kann man die unbestimmte Funktion φ in (5) noch bis auf einen Zahlenfaktor bestimmen: Die neuen Dimensionen sind:

$$[V] = lt^{-1}; \quad [a] = l; \quad [\Delta \varrho] = ml^{-3}; \quad [\mu] = l^{-2}tk; \quad [g] = m^{-1}k.$$

(μ hat nämlich die Dimension Spannung pro Geschwindigkeitsgradient; g bedeutet jetzt Intensität des Schwerefeldes, also Kraft pro Masse.) Wieder ist $r = 0$, aber jetzt $m = 4$, also $z = 1$. Tatsächlich kann man nur noch die eine dimensionslose Größe $\pi = \frac{V \mu}{a^2 g \Delta \varrho}$ aufstellen, so daß über (5) hinausgehend auf

$$V = \text{Zahl} \cdot \frac{a^2 g \Delta \varrho}{\mu} \quad (6)$$

geschlossen werden kann. Die Stokessche Fallformel ergibt sich hier *vollständig* bis auf den (aus Dimensionsbetrachtungen niemals hervorgehenden) Zahlenfaktor $8/9$.

Könnte man in ähnlicher Weise auch über Formel (4) hinauskommen? Die Erfahrung sagt von vornherein: Nein! Man weiß, daß der Widerstandsbeiwert in komplizierter Weise noch von *beiden* Argumenten: Reynolds'sche Zahl und Verhältnis der Geschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit, abhängt. Aber muß man diese Erfahrung erst zur Verfügung haben, um die

Grenzleistung der Dimensionsanalysis zu beurteilen? Ist man, wenn Beobachtungen nicht in ausreichendem Maße zur Verfügung stehen, auf planloses Probieren neuer Grundgrößen angewiesen?

Gewiß kann man leicht einsehen, warum bei der Herleitung der Stokes'schen Fallformel die Einführung der Kraft als Grundgröße weiterhilft, dagegen bei der allgemeinen Widerstandsformel nicht. Da bei der schleichenden Strömung Trägheitskräfte keine Rolle spielen, ist die gewohnte Dimensionsbindung $[k] = mlt^{-2}$ für dieses Problem unerheblich und kann fallengelassen werden. Anders beim Strömungswiderstand gegen beliebige Geschwindigkeit. Dort würde die Einführung der vierten Grundgröße Kraft sofort auch die Berücksichtigung einer neuen Dimensionskonstanten γ aus $K = \gamma mb$ erzwingen, die unter die bezogenen Größen einzureihen wäre. Mit m würde daher auch n je um eins zunehmen, das Ergebnis der Dimensionsbetrachtung wäre daher unverändert. Aber die Dinge liegen nicht immer so offen und jedenfalls muß man, um sicher zu gehen, nach einer festen Regel beurteilen können, welche Dimensionsbindungen für ein gegebenes Problem erheblich sind.

Nun wird es in vielen Fällen möglich sein, wenigstens anzugeben, welche Grundgesetze für das betrachtete Problem maßgebend sind, wenn auch deren Integration ungelöst sein mag. In diesen Fällen läßt sich aus den Grundgleichungen heraus beurteilen, bis zu welchem Ergebnis die Dimensionsbetrachtung vorzudringen vermag. Eine einfache Abzählung gestattet nämlich, anzugeben, wie groß die Zahl der Grundgrößen ist, die ohne Einführung neuer Dimensionskonstanten bei der vorliegenden Aufgabe angenommen werden können. Statt jeder allgemeinen Erörterung nehmen wir diese Abzählung bei den oben angeführten Beispielen vor:

Die Berechnung des stationären Strömungswiderstandes bei beliebiger Geschwindigkeit erfordert Integration des folgenden Gleichungssystems:

$$\varrho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p + 2 \mu \operatorname{div} \operatorname{def} (\mathbf{v}), \quad (7)$$

$$p = p_0 + \frac{dp}{d\varrho} (\varrho - \varrho_0), \quad (8)$$

$$\operatorname{div} (\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad (9)$$

dazu als Randbedingungen

$$\text{für } r = a: \quad \mathbf{v} = 0, \quad (10)$$

$$\text{für } r = \infty: \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty = V. \quad (11)$$

Diese Gleichungen verknüpfen die Dimensionen folgender Größen:

Gleichung (7) verknüpft $[\varrho, \mathbf{v}, l, p, \mu]$ auf zweifache Weise (weil drei Posten dimensionsgleich sein müssen!).

Gleichung (8) verknüpft $[p, \varrho]$ überhaupt nicht (da sie in beiden Größen homogen ist); für

Gleichung (9) gilt hinsichtlich $[\varrho, l, v]$ dasselbe.

(10) und (11) bedeuten keine Dimensionsbindungen.

Insgesamt sind in (7) bis (11) fünf Größen durch zwei unabhängige Dimensionsbindungen verknüpft. Es können bei diesem Problem also höchstens drei Dimensionen willkürlich gewählt, d. h. drei beliebige Grundgrößen eingeführt werden. Jede weitere würde die Einführung einer Dimensionskonstanten in (7) bis (11) erzwingen. *Deshalb stellt (4) schon die erreichbare Maximalaussage der Dimensionsanalysis dar!*

Machen wir die Gegenprobe am Stokesschen Fallproblem: Es wird beschrieben durch die Grundgleichungen:

$$\varrho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (13)$$

An der Kugeloberfläche:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_z = -V. \quad (14)$$

Im Unendlichen:

$$\mathbf{v} = 0. \quad (15)$$

Gleichung (12) verknüpft die Dimensionen $[\varrho, g, \mu, l, v]$ einfach.

Gleichung (13) stellt als homogene Gleichung keine Dimensionsbindung dar, ebenso wenig enthalten (14), (15) eine solche. Fünf Größen unterliegen also nur einer Dimensionsbeziehung, *deshalb können bei dieser Aufgabe vier Grundgrößen willkürlich gewählt und konnte (5) zu (6) vervollständigt werden.*

Der gemeinsame Gedanke dieser Überlegungen leuchtet ein: Da die Grundgleichungen eines Problems implizite seine vollständige Lösung schon enthalten, so steckt auch jede Teilaussage über diese Lösung, z. B. jede Dimensionsbeziehung, im Keim in ihnen beschlossen. Gegenüber Einwänden, die bei ersten Anwendungsversuchen leicht auftauchen, soll aber noch an einigen Beispielen gezeigt werden, daß die Abzählung von zufälligen Variationen der Darstellung unabhängig ist, wenn man mit der nötigen Sorgfalt vorgeht.

Z. B. sind in (7) die Schwerewirkungen als unerheblich weggelassen. Hätte man sie als Zusatz $\varrho \mathbf{g}$ auf der rechten Seite zugefügt, so hätte sich zwar die Zahl der bezogenen Größen um eine (g) vermehrt, doch würde

(Gleichung (7) jetzt auch drei Dimensionsbindungen darstellen. Das Ergebnis wäre also unverändert.

Ergibt sich aber nicht eine andere Abzählung, wenn das Glied $\varrho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ in (7) verallgemeinernd als $\varrho d\mathbf{v}/dt$ geschrieben wird, so daß diese Gleichung jetzt zwei Bindungen für die Dimensionen der sechs Größen ϱ, v, t, l, p, μ darstellt? Tatsächlich hat man bei der Abzählung abkürzende Zusammenfassungen wie die substantielle Ableitung $d\mathbf{v}/dt$ entweder zu vermeiden, oder durch eine weitere Gleichung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \quad (16)$$

zu erklären, weil sonst die in ihnen beschlossene Dimensionsbindung (hier $[v] = lt^{-1}$) nicht zur Geltung kommt.

Wie aber, wenn die Kontinuitätsgleichung in der allgemeinen Form

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad (9')$$

geschrieben wird, in der sie nur noch in ϱ homogen ist, für v, l, t aber eine Bindung bedeutet? Die Ersetzung von (9) durch (9') schadet nichts, denn entweder kommt t in (7) nicht vor, dann führt (9') t erst ein, setzt aber gleichzeitig eine Bindung dafür fest. Oder t kommt in (7) mit (16) schon vor, dann ist die in (9') enthaltene Bindung nicht zu zählen, weil sie nur die Dimensionsgleichung (16) wiederholt, also keine unabhängige neue Bindung darstellt.

Oder: Statt (8) hätte man

$$p = p_0 + c^2(\varrho - \varrho_0) \quad (8')$$

ansetzen können. Dadurch wäre eine weitere Größe c eingeführt, gleichzeitig aber eine weitere Bindung geschaffen worden, denn (8') ist nur noch in je zwei seiner Posten homogen. Man kann sich allerdings fragen, ob c als Schallgeschwindigkeit eine *neue* Größe bedeutet, oder ob es nicht von vornherein den Dimensionscharakter von v hat. Darauf ist zu antworten: Erstens kann mich niemand hindern, Schallgeschwindigkeiten und Strömungsgeschwindigkeiten in *verschiedenen* willkürlichen Einheiten zu messen: insofern ist es *nicht notwendig*, c und v von vornherein als gleichdimensioniert anzunehmen. Doch wird und kann man das ruhig tun, denn die in (8') enthaltene Dimensionsbindung kommt dann auch in Wegfall, weil sie mit einer in (7) schon enthaltenen gleichlautend wird.

Als letztes sei auf die Frage eingegangen: Gehört zu den Grundgleichungen des Problems: „Widerstandsbestimmung“ auch die Definitions-

gleichung des Strömungswiderstandes aus Druck- und Reibungsspannungsinintegralen

$$\mathfrak{W} = \oint p \, df - 2\mu \oint [\text{def } \mathfrak{v}, df]? \quad (17)$$

Auch hier ist es gleichgültig, ob man diese Frage bejaht oder verneint, denn im ersteren Falle führt (17) eine neue Größe W ein, stellt aber auch gerade eine neue Bindung dar, denn die dimensionelle Gleichwertigkeit der beiden Integrale unter sich ist schon durch (7) festgelegt.

Diese Erörterungen sollen zeigen, daß es für die in Rede stehende Abzählung genügt, *irgendeinen* mathematisch vollständigen Ausdruck des physikalischen Gedankens zu besitzen. Allerdings ist bei der Beurteilung der Dimensionsbeziehungen sorgfältig vorzugehen; besonders ist darauf zu achten, daß homogene Gleichungen und abhängige Beziehungen nicht mitgezählt werden und daß nicht durch Abkürzungen vorhandene Dimensionsbeziehungen verborgen werden.

Breslau, Institut für theoretische Physik.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, physikalisch-radioaktive Abteilung, Berlin-Dahlem.)

Über die Neutronenresonanzniveaus von Iridium und Rhodium und die gegenseitige Überdeckung ihrer Resonanzgebiete.

Von **Rudolf Jaeckel** in Berlin-Dahlem.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 28. Oktober 1937.)

Die Absorption der Resonanzneutronen läßt sich sowohl beim Iridium als auch beim Rhodium durch einen Dispersionsansatz darstellen. Messungen über die Absorption mit Ir-Indikator und Rh-Absorber ergeben die gegenseitige Lage des Ir-Niveaus und des Rh-Niveaus. Die Absorption im Gebiet thermischer Neutronen ist beim Rh und beim Ir hauptsächlich durch die Wirkung eines einzigen Resonanzniveaus bedingt.

In einer früheren Arbeit¹⁾ war für das Wolfram-Resonanzniveau gezeigt worden, daß durch einen Ansatz nach Gleichung (1) die Selbstabsorptionskurve (Absorptionskurve für langsame Neutronen in Wolfram gemessen mit Wolframindikator nach Wegfilterung der C-Neutronen) richtig wiedergegeben wurde.

$$K(\varepsilon) = \frac{K_0}{1 + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\Gamma/2}\right)^2} \quad (1)$$

$K(\varepsilon)$ = Neutronenabsorptionskoeffizient, K_0 = dasselbe an der Stelle maximaler Absorption, ε = Energie der einfallenden Neutronen, ε_g = dasselbe an der Stelle maximaler Absorption, Γ = Strahlungsbreite des Niveaus.

Ein solcher Verlauf der Absorptionskurve ist immer dann zu erwarten, wenn für das untersuchte Niveau gilt:

$$\varepsilon_g \gg \Gamma \gg \Delta; \quad d \gg \Gamma, \quad (2)$$

Δ = Doppler-Breite des Niveaus, d = Abstand des untersuchten Niveaus von dem ihm zunächst gelegenen Niveau desselben Kerns.

Es lag nun der Gedanke nahe, für den Fall zweier verschiedener Kerne mit benachbarten Resonanzstellen die gegenseitige Absorption und damit die Überlappung der Resonanzniveaus zu messen. Man konnte hoffen, aus der Analyse der Absorptionskurven für gegenseitige Absorption das

¹⁾ R. Jaeckel, ZS. f. Phys. **104**, 762, 1937.

Verhältnis des Abstandes der Resonanzstellen zur Linienbreite¹⁾ zu bestimmen und daraus in Verbindung mit einer Messung des Abstandes der Resonanzstellen nach der Methode der Absorption in Bor den Wert für die Linienbreite zu ermitteln. Nach den vorliegenden Messungen über die gegenseitige Lage von Neutronenresonanzniveaus schienen die Niveaus von Rhodium und Iridium für eine derartige Untersuchung besonders geeignet zu sein²⁾.

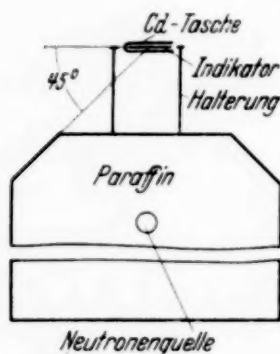


Fig. 1. Bestrahlungsanordnung.

Es wurden daher zunächst die Selbstabsorptionskurven sowohl für Rh wie Ir gemessen. Der Vergleich der gemessenen Absorptionskurven mit solchen Absorptionskurven, die unter Verwendung eines Ansatzes nach Gleichung (1) berechnet waren, lieferte dann die Höhen in der Linienmitte (K_0 und K'_0)³⁾. Schließlich wurde die Überlappung der beiden Niveaus durch eine Selbstabsorptionskurve in Ir mit Rh-Vorfilter gemessen.

Dabei war die experimentelle Anordnung kurz folgende. Die Rh- bzw. Ir-Bleche (Absorber und Indikator) befanden sich bei der Bestrahlung in einer Cadmiumtasche von 0,66 mm Wandstärke in 4 cm Abstand von einem Paraffinblock von 12,5 cm Durchmesser und 15 cm Höhe. Der Paraffinblock enthielt die Neutronenquelle (RaEm + Be) und war oben konisch abgestutzt, so daß nur solche Neutronen den Indikator treffen konnten, deren Einfallswinkel gegen die Indikatoroberfläche zwischen 45° und 90° lag (siehe Fig. 1). Diese Anordnung von Quelle, Absorber und Indikator wurde zum Zwecke einer möglichst großen Annäherung an den Parallellfall getroffen. Beim Rh wurde nun die Aktivität des 45^S -Körpers als Funktion der vorgeschalteten Rh-Absorberdicke (y') und beim Ir die Aktivität des $19,5^h$ -Körpers als Funktion der vorgeschalteten Ir-Absorberdicke (y) gemessen. Die so erhaltene Selbstabsorptionskurve zeigt beim Ir Fig. 2 (ausgezogene Kurve) und beim Rh Fig. 3 (ausgezogene Kurve)⁴⁾.

¹⁾ Auf die Notwendigkeit derartiger Untersuchungen hat inzwischen auch H. A. Bethe, Rev. of Mod. Phys. **9**, 147, 1937, hingewiesen. —

²⁾ Die Werte für die Resonanzenergien sind in diesen beiden Fällen: Rh $\sim 1,3$ Volt (nach Messungen verschiedener Forscher), Ir $\sim 1,6$ Volt (H. H. Goldsmith u. F. Rasetti, Phys. Rev. **50**, 328, 1936). — ³⁾ Alle Größen, die sich auf das Rh beziehen, sollen durch einen Strich im Exponenten von den auf das Ir bezüglichen Werten unterschieden werden. — ⁴⁾ Die senkrechten Striche geben die statistischen Fehler der einzelnen Meßpunkte an. Wo eine derartige Angabe fehlt, sind die statistischen Fehler kleiner als der Durchmesser der Umrandung der Meßpunkte. Dasselbe gilt für alle folgenden Kurven.

Alle Messungen wurden mit einer Indikatordicke von $0,11 \text{ g/cm}^2$ beim Ir und von $0,12 \text{ g/cm}^2$ beim Rh durchgeführt.

Daß die gemessene Absorptionskurve durch Selbstumkehr eines Resonanzniveaus zustande kommt, ergab sich für das Resonanzniveau des Ir in folgender Weise. Außer der Absorptionskurve der Fig. 2 (ohne Borfilter) wurde noch eine Selbstabsorptionskurve hinter einem Borfilter

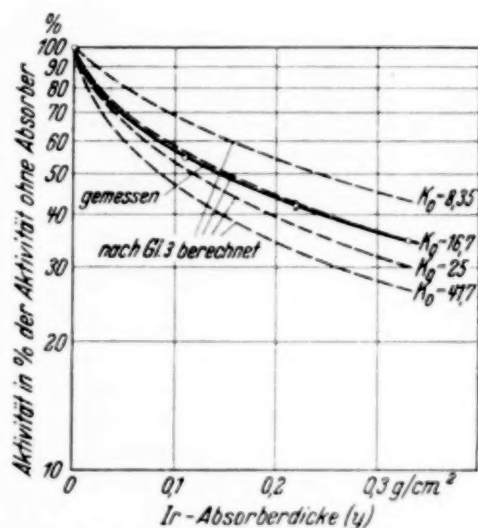


Fig. 2. Vergleich der gemessenen und berechneten Selbstabsorptionskurven in Iridium.

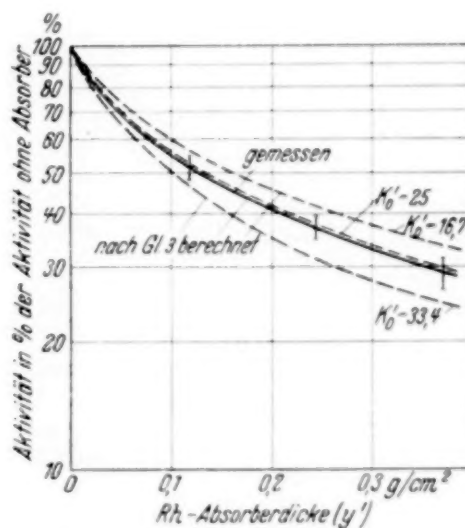


Fig. 3. Vergleich der gemessenen und berechneten Selbstabsorptionskurven in Rhodium.

von $0,127 \text{ g/cm}^2$ aufgenommen. Wie Fig. 4 zeigt, wurden durch dieses Borfilter alle Werte der Absorptionskurve ohne Borfilter im selben Verhältnis verkleinert, d. h. die gemessene Absorptionskurve ist durch Selbstumkehr eines Resonanzniveaus bedingt. Dasselbe hatten Preiswerk und v. Halban¹⁾ schon früher für das Rh-Resonanzniveau gezeigt. Wir dürfen also die gemessenen Selbstabsorptionskurven der Fig. 2 und 3 mit Absorptionskurven, die unter Verwendung eines Ansatzes nach Gleichung (1) berechnet sind, vergleichen und daraus die Werte für K_0 und K'_0 bestimmen. Wir benutzen dazu für die Aktivität eines Indikators von der Dicke a hinter einem Absorber von der Dicke y einen Ansatz von der Form (siehe Fig. 5):

$$A(y, K_0)$$

$$= C \int_0^\infty \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{45^\circ} \frac{K(\varepsilon)}{\cos \vartheta} e^{-\frac{K(\varepsilon)(x+y)}{\cos \vartheta}} e^{-ux} (\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dx d\varepsilon,$$

¹⁾ P. Preiswerk u. H. v. Halban. Nature **138**, 163, 1936.

μ = Absorptionskoeffizient für die Absorption der β -Strahlen des künstlich radioaktiven Körpers im Indikator. Beim Ir ist $\mu = 9 \text{ cm}^2/\text{g}$ (nach eigenen Messungen), beim Rh ist $\mu = 6 \text{ cm}^2/\text{g}$ [nach Messungen von Fermi¹⁾ und

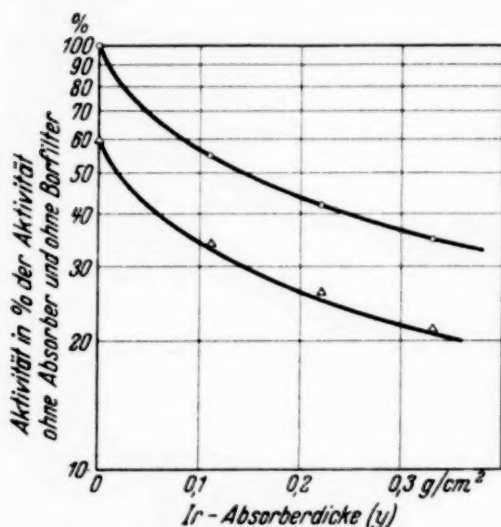


Fig. 4. Iridium-Selbstabsorptionskurven mit und ohne Borfilter.

Untere Kurve : obere Kurve $\cdot 0,6$.

Meßpunkte der Selbstabsorptionskurven:

ohne Borfilter \circ

mit $0,127 \text{ g/cm}^2$ Borfilter \triangle .

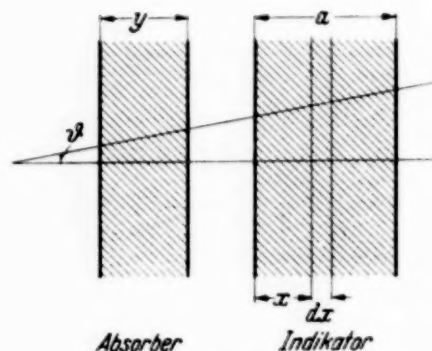


Fig. 5.

seinen Mitarbeitern]. $W(\vartheta) = \cos \vartheta + \sqrt{3} \cos^2 \vartheta$ = Anzahl der pro Raumwinkeleinheit auf den Indikator fallenden Neutronen als Funktion des Winkels ϑ).

Nach Frisch³⁾ ergibt sich genähert:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{45^\circ} e^{-\frac{K(\varepsilon)(x+y)}{\cos \vartheta}} (1 + \sqrt{3} \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = C_1 e^{-K^*(\varepsilon)(x+y)}$$

mit

$$K^*(\varepsilon) = 1,2 K(\varepsilon);$$

daraus folgt weiterhin:

$$A(y, K_0) = C_2 \int_0^\infty \frac{K_0^*/1 + E^2}{\mu + (K_0^*/1 + E^2)} e^{-\frac{K_0^*}{1 + E^2} y} \left[1 - e^{-\left(\frac{K_0^*}{1 + E^2} + \mu\right) a} \right] dE, \quad (3)$$

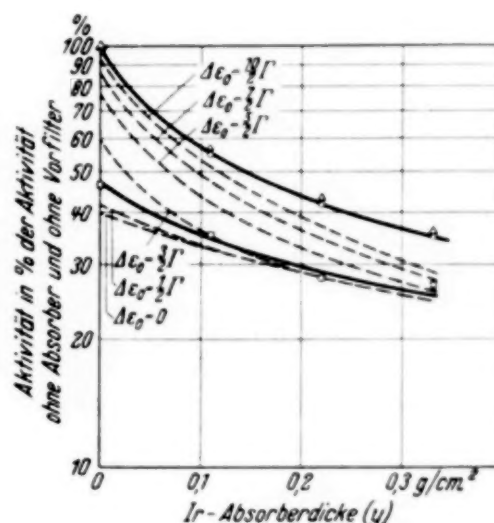
$$E = \frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{I/2}; \quad K_0^* = 1,2 K_0.$$

¹⁾ E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè, Proc. Roy. Soc. London (A) **149**, 522, 1935. — ²⁾ E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. **50**, 899, 1936. Die Frage, ob diese Winkelverteilung für den vorliegenden Fall gültig ist, wird in der unten zitierten Arbeit von O. R. Frisch diskutiert. — ³⁾ O. R. Frisch, Mitteilungen der Kgl. Dänischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Math.-Phys. Klasse, Bd. 14, Nr. 12, 1937.

In Fig. 2 ist nun die Funktion $A(y, K_0)$ für verschiedene Werte des Parameters K_0 (gestrichelte Kurven) aufgetragen. Der Vergleich dieser Kurven mit der gemessenen Absorptionskurve liefert für K_0 einen Wert von $K_0 = 17 \text{ cm}^2/\text{g}$. In analoger Weise ergibt sich aus den Kurven der Fig. 3 $K'_0 = 25 \text{ cm}^2/\text{g}^1$.

Zur Bestimmung der Überlappung der beiden Niveaus wurde nun eine Ir-Selbstabsorptionskurve hinter einem Rh-Filter von $0,12 \text{ g/cm}^2$ aufgenommen und mit der ohne Rh-Filter gemessenen Selbstabsorptionskurve

Fig. 6. Selbstabsorption von Iridium mit Rh- und Ag-Vorfilter.
Selbstabsorptionskurve:
ohne Vorfilter \bigcirc
mit $0,12 \text{ g/cm}^2$ Rh-Vorfilter \square
mit $0,102 \text{ g/cm}^2$ Ag-Vorfilter \triangle .
Gestrichelte Kurven: Selbstabsorptionskurven mit Rh-Vorfilter berechnet nach Gleichung 3a für verschiedene Werte des Abstandes $\Delta\epsilon_0$ des Resonanzniveaus.



in Ir verglichen (siehe Fig. 6, obere ausgezogene Kurve: Selbstabsorptionskurve; untere ausgezogene Kurve: dasselbe mit Rh-Vorfilter).

Schon ein qualitativer Vergleich der beiden Kurven zeigt, daß die Resonanzniveaus von Rh und Ir sehr benachbart sein müssen (Abstand in der Größenordnung der Halbwertsbreite), und zwar aus folgendem Grunde. Wie Fig. 6 zeigt, nimmt das Rh-Filter gerade den ersten steilen Abfall der Ir-Selbstabsorptionskurve fort, während es im übrigen Teil der Ir-Absorptionskurve nicht besonders stark absorbiert. Eine solche Wirkung des Vorfilters ist aber nur möglich, wenn sich die Mittelteile der beiden Resonanzkurven überlappen und außerdem die Linienbreiten von der gleichen Größenordnung sind. Dagegen sollte für den Fall, daß der Abstand der Resonanzniveaus von Vorfilter und Indikator groß ist gegen die Linienbreiten, das Vorfilter die Selbstabsorptionskurve praktisch nicht

¹⁾ Nach Abschluß der vorliegenden Messungen kündigten J. H. Manley, H. H. Goldsmith u. J. S. Schwinger, Phys. Rev. **51**, 1022, 1937, eine Arbeit mit ähnlichen Ergebnissen an.

verändern. Dieses letztere Verhalten wurde an einer Selbstabsorptionskurve in Ir hinter einem Silbervorfilter von $0,102 \text{ g/cm}^2$ beobachtet (Fig. 6, Δ Meßpunkte).

Zum Vergleich mit diesen qualitativen Überlegungen wurde der Ansatz nach Gleichung (3) für den Fall einer Selbstabsorptionskurve mit Vorfilter (K'_0 und y') modifiziert. Dann ergibt sich die Aktivität des Indikators zu

$$A^*(y) = C_2 \int_0^\infty \frac{K_0^*}{\mu + \left(\frac{K_0^*}{1+E^2}\right)} e^{-\frac{K_0^*}{1+E^2}y} e^{-\frac{K_0'^*}{1+E'^2}y'} \left[1 - e^{-\left(\frac{K_0^*}{1+E^2} + \mu\right)a}\right] dE. \quad (3a)$$

Mit dem weiter unten ermittelten Wert für $I''/I = 1,25$ läßt sich $A^*(y)$ für verschiedene Werte des Abstandes der Resonanzniveaus $\Delta\epsilon_0 = \epsilon_g - \epsilon'_g$ numerisch integrieren. Die so für die Werte $\Delta\epsilon_0 = 0, \frac{1}{2}I, \frac{3}{2}I, \frac{5}{2}I, \frac{7}{2}I$ und $5I$ erhaltenen Selbstabsorptionskurven sind in Fig. 6 zum Vergleich mit der gemessenen Kurve eingetragen. Wie man sieht, besteht also zwischen den Resonanzenergien von Rh und Ir (ϵ'_g und ϵ_g) und der Strahlungsbreite (I) die Beziehung:

$$|\Delta\epsilon_0| = |\epsilon_g - \epsilon'_g| \simeq I. \quad (4)$$

Außerdem zeigen die Kurven, daß für benachbarte Niveaus die Selbstabsorptionskurven mit Vorfilter sehr empfindlich gegen kleine Änderungen des Niveauabstandes sind. Aus diesem Grunde wurde die Absorption in Ir mit einem Rh-Indikator für die beiden Perioden von 45^s und $3,9^m$ gemessen. Es ergab sich innerhalb der Meßgenauigkeit für beide Perioden gleiche Schwächung, wie es für isomere Kerne, die durch Einfangung in dasselbe Ausgangsniveau¹⁾ entstehen, zu erwarten ist.

Wie wir weiter unten sehen werden, ist $\epsilon_g \gg I$. Unter diesen Umständen ist es natürlich nicht möglich, durch Borabsorptionsmessungen ϵ_g und ϵ'_g einzeln zu bestimmen und daraus die Linienbreite nach Gleichung (4) zu ermitteln, da die Genauigkeit der Borabsorptionsmessung zur Bestimmung der Differenz zweier fast gleicher Größen nicht ausreicht.

¹⁾ Ein analoges Ergebnis erhielt R. Fleischmann, ZS. f. Phys. **107**, 205, 1937, für die beiden isomeren Kernperioden $T = 18^m$ und $T = 4,2^h$ von ^{80}Br durch Borabsorptionsmessungen. Auch hier werden die beiden isomeren Kernperioden durch Einfangung der Neutronen in dasselbe Ausgangsniveau gebildet. Dagegen liegen nach L. Meitner, O. Hahn u. F. Strassmann, ebenda **106**, 249, 1937, bei den isomeren Zerfallsreihen der Transurane kompliziertere Verhältnisse vor.

Es wurde daher zur Bestimmung von Γ in folgender Weise verfahren. Nach Bethe und Placzek¹⁾ gilt für den Fall, daß die Absorption im Gebiet thermischer Neutronen nur durch die Wirkung eines Resonanzniveaus bedingt ist, die Beziehung:

$$K_C = \frac{K_0}{1 + \left(\frac{\varepsilon_C - \varepsilon_g}{\Gamma/2}\right)^2} \sqrt{\frac{|\varepsilon_g|}{\varepsilon_C}}. \quad (5)$$

K_C = Absorptionskoeffizient für C-Neutronen, ε_C = Energie der C-Neutronen.

Da in dieser Gleichung außer der Strahlungsbreite Γ alle Größen bekannt sind, läßt sich diese also hieraus bestimmen. Wir wollen uns aber zunächst von der Berechtigung der Annahme, daß im thermischen Gebiet nur ein Niveau wirksam ist, überzeugen. Zu diesem Zwecke soll das Verhältnis $\frac{\Gamma''}{\Gamma} \left(= \frac{\text{Strahlungsbreite des Rh-Niveaus}}{\text{Strahlungsbreite des Ir-Niveaus}} \right)$ 1. aus Aktivierungen durch Resonanzneutronen und 2. aus Aktivierungen durch C-Neutronen bestimmt werden.

1. Für die Aktivierung (A_g) eines Indikators durch Resonanzneutronen ergibt sich nach Amaldi und Fermi²⁾ unter Berücksichtigung des Einflusses der Linienform nach Gleichung (3):

$$A_g = \frac{N}{\varepsilon_g} \eta F \Gamma B(K_0)$$

mit

$$B(K_0) = \int_0^\infty \frac{\frac{K_0^*}{1+E^2}}{\frac{K_0^*}{1+E^2} + \mu} \left[1 - e^{-\left(\frac{K_0^*}{1+E^2} + \mu\right)a} \right] dE,$$

η = Wirksamkeit der β -Strahlen des Indikators bei der Aktivitätsmessung im Zählrohr,

$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{\text{Durchlässigkeit der Zählrohrwand für die } \beta\text{-Strahlen des Ir-19,5h-Körpers}}{\text{Durchlässigkeit der Zählrohrwand für die } \beta\text{-Strahlen des Rh-45s-Körpers}}$

F = Fläche des Indikators,

$\frac{N}{\varepsilon_g}$ = Anzahl der Neutronen von der Energie ε_g , die pro min und Einheit des Energieintervalls auf den Quadratzentimeter des Indikators auftreffen.

¹⁾ H. A. Bethe u. G. Placzek, Phys. Rev. **51**, 450, 1937. — ²⁾ E. Amaldi u. E. Fermi, l. c.

Daraus folgt:

$$\frac{A_g}{A'_g} = \frac{\varepsilon'_g \eta F B(K_0)}{\varepsilon_g \eta' F' B'(K'_0)}.$$

Es wurde nun ein Rh-Indikator und ein Ir-Indikator unter gleichen Bestrahlungsbedingungen in der oben beschriebenen geometrischen Anordnung und unter Wegfiltrierung der C-Neutronen aktiviert. Der Ir-Indikator hatte eine Fläche von 5 cm^2 und eine Dicke von $0,11 \text{ g/cm}^2$. Er zeigte für den Fall der Bestrahlung bis zur Sättigung für die $19,5^{\text{h}}$ -Periode eine Anfangsaktivität von $A_g = 129 \pm 1,5$ Teilchen/min. Der entsprechende Rh-Indikator hatte eine Fläche von $4,1 \text{ cm}^2$ und eine Dicke von $0,12 \text{ g/cm}^2$ und zeigte bei Sättigungsbestrahlung für die 45^{s} -Periode eine Anfangsaktivität von $A'_g = 195 \pm 5$ Teilchen/min. Durch Einsetzen der so gewonnenen Werte erhält man:

$$\frac{I'}{I} = \frac{\varepsilon'_g \eta F B(K_0) A'_g}{\varepsilon_g \eta' F' B'(K'_0) A_g} = \frac{\varepsilon'_g}{\varepsilon_g} \frac{0,855 \cdot 5 \cdot 1,452 \cdot 195}{0,883 \cdot 4,1 \cdot 2,25 \cdot 129} = 1,15 \frac{\varepsilon'_g}{\varepsilon_g}$$

mit

$$\varepsilon_g = 1,4 + \frac{I}{2}; \quad \varepsilon'_g = 1,4 - \frac{I}{2}; \quad \frac{I}{\varepsilon_g} \sim 0,1^1)$$

folgt:

$$\frac{I'}{I} = 1,15 \frac{1 - I/2,8}{1 + I/2,8} = 1.$$

2. Für die Aktivierung (A_c) eines Indikators durch C-Neutronen ergibt Gleichung (5) unter der Annahme

$$\varepsilon_c \ll \varepsilon_g \quad \text{und} \quad \left(\frac{I}{2}\right)^2 \ll \varepsilon_g^2$$

und unter Berücksichtigung der Absorption der β -Strahlen im Indikator:

$$A_c = \frac{1}{4} N_c K_0^* I^2 \varepsilon_g^{-3/2} \varepsilon_c^{-1/2} \eta F \int_0^a e^{-\mu x} dx^2).$$

N_c = Anzahl der C-Neutronen, die pro min und cm^2 auf den Indikator auftreffen.

¹⁾ Der Wert für $\frac{\varepsilon_g + \varepsilon'_g}{2} = 1,4$ Volt wurde als Mittelwert aus den Borabsorptionsmessungen verschiedener Forscher abgeschätzt. Bezüglich der Größe $I/\varepsilon_g \sim 0,1$ siehe weiter unten. — ²⁾ Hier ist wegen des schrägen Einfalls der Neutronen nicht K_0 , sondern $K_0^* = 1,2 K_0$ einzusetzen. Siehe oben die Ableitung von Gleichung (3).

Daraus folgt:

$$\frac{A_C}{A'_C} = \frac{F^2}{F'^2} \frac{\varepsilon_g^{-3/2} K_0^* \eta F \int_0^a e^{-\mu x} dx}{\varepsilon_g'^{-3/2} K_0'^* \eta' F' \int_0^{a'} e^{-\mu' x} dx}.$$

Zur Bestimmung der Größen A_C und A'_C wurden nun die beiden schon im Falle (1) benutzten Indikatoren unter denselben Bestrahlungsbedingungen wie dort, jedoch ohne Cd-Absorber, aktiviert. Bei Bestrahlung bis zur Sättigung zeigte jetzt der Ir-Indikator eine Anfangsaktivität von $230 \pm 2,5$ Teilchen/min und der Rh-Indikator eine solche von 569 ± 15 Teilchen/min. Daraus erhält man:

$$A_C = (230 \pm 2,5) - (129 \pm 1,5) = 101 \pm 4 \text{ Teilchen/min,}$$

$$A'_C = (569 \pm 15) - (195 \pm 5) = 374 \pm 20 \text{ Teilchen/min.}$$

Durch Einsetzen dieser Größen folgt dann weiterhin:

$$\frac{F'^2}{F^2} = \frac{A'_C K_0^* \eta F \int_0^a e^{-\mu x} dx}{A_C K_0'^* \eta' F' \int_0^{a'} e^{-\mu' x} dx} \frac{\varepsilon_g^{-3/2}}{\varepsilon_g'^{-3/2}} = \frac{374 \cdot 20 \cdot 0,855 \cdot 5 \cdot 0,07}{101 \cdot 30 \cdot 0,883 \cdot 4,1 \cdot 0,085} \frac{\varepsilon_g^{-3/2}}{\varepsilon_g'^{-3/2}},$$

$$\frac{F'}{F} = \sqrt[3]{2,4} \left(\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_g'} \right)^{-3/4} = 1,55 \left(\frac{1 - F/2,8}{1 + F/2,8} \right)^{3/4} \approx 1,4.$$

Es ergibt sich also auf beiden Wegen für das Verhältnis F'/F derselbe Wert. Außerdem ist die Aktivierung durch Resonanzneutronen sowohl beim Rh wie beim Ir nur durch die Wirkung eines Niveaus¹⁾ bedingt. Daraus folgt, daß für die Absorption im Gebiet thermischer Neutronen entweder in beiden Fällen auch nur ein einziges Niveau maßgebend ist, oder daß die höheren Niveaus in genau der gleichen Weise zur Absorption der C-Neutronen beitragen, wie das jeweils niedrigste Niveau. Nun werden die höheren Niveaus immer nur dann in merkbarer Intensität zur Absorption im thermischen Gebiet beitragen, wenn zwischen ihrem mittleren Abstand (D) und der Energie (ε_g) des niedrigsten Niveaus die Beziehung besteht $\varepsilon_g \gtrsim D$.

¹⁾ Aus dem Verlauf der Selbstabsorptionskurve mit Borfilter (Fig. 4) folgt, daß diese Selbstabsorptionskurve durch Selbstumkehr von entweder nur einem Niveau oder von mehreren Niveaus mit derselben Höhe in der Liniennitte bedingt ist. Die Überlappungsmessung (Selbstabsorptionskurve in Ir mit Rh-Filter, Fig. 6) zeigt dann weiterhin, daß beim Rh und beim Ir zur Aktivierung durch Resonanzneutronen jeweils nur ein Niveau beiträgt, da es beliebig unwahrscheinlich ist, daß sich gerade alle Ir-Niveaus, die für die Aktivierung durch nichtthermische Neutronen maßgebend sind, mit den entsprechenden Rh-Niveaus überlappen.

Diese Bedingung kann aber in den vorliegenden beiden Fällen nicht erfüllt sein, da sich sonst die höheren Niveaus auch bei der Aktivierung durch Resonanzneutronen hätten bemerkbar machen müssen. Die Absorption im Gebiet thermischer Neutronen ist also sowohl beim Rh wie beim Ir nur durch die Wirkung eines einzigen Resonanzniveaus¹⁾ bedingt. Daraus folgt weiterhin, daß selbst bei Kernen mit einem so hohen Atomgewicht ($A = 192$), wie dem des Ir, der mittlere Abstand der Neutronenresonanzniveaus groß ist gegen einen Wert von 1 Volt.

Gleichung (5) darf also zur Berechnung von I'' benutzt werden. Da ferner

$$\varepsilon_g'^2 \gg \frac{I'^2}{4} \quad \text{und} \quad \varepsilon_g' \gg \varepsilon_c$$

ist, erhalten wir

$$K'_C = K'_0 \frac{I'^2}{4 \varepsilon_g'^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_g'}{kT}}.$$

Mit dem experimentell bestimmten Wert: $K'_C = 0,7 \text{ cm}^2/\text{g}^2$) ergibt sich weiterhin:

$$I'^2 = \frac{K'_C}{K'_0} 4 \varepsilon_g'^2 \sqrt{\frac{kT}{\varepsilon_g'}} = \frac{0,7}{25} \cdot 4 \cdot \varepsilon_g'^2 \left(\frac{0,026}{1,35} \right)^{1/2},$$

$$I' = 0,125 \varepsilon_g'$$

und aus der Beziehung $I'' = 1,25 I'$ ³⁾ folgt dann:

$$I = 0,1 \cdot \varepsilon_g'; \quad \varepsilon_g' = 1,4 - \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot \varepsilon_g'; \quad \varepsilon_g' = 1,3_3 \text{ Volt};$$

$$I'' = 0,17 \text{ Volt}, \quad I = 0,14 \text{ Volt}$$

zum Vergleich mit den entsprechenden Werten für die Doppler-Breiten⁴⁾

$$\Delta' = 0,07 \text{ Volt}, \quad \Delta = 0,06 \text{ Volt}.$$

¹⁾ Dieses Ergebnis wird gestützt durch Berechnungen von H. A. Bethe, Rev. of Mod. Phys. **9**, 144, 1937, der auf Grund von Messungen anderer Autoren zu demselben Schluß in bezug auf das Rh-Resonanzniveau geführt wird.

— ²⁾ Nach Messungen von I. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. **48**, 265, 1935, und E. Amaldi u. E. Fermi, l. c.

— ³⁾ Der auf dem Wege 2 gewonnene Wert für I''/I dürfte genauer sein als der Wert, der auf dem Wege 1 ermittelt wurde, da im zweiten Falle die unsicherste Größe, nämlich das Verhältnis $\varepsilon_g/\varepsilon_g'$ in niedrigerer Potenz in die Berechnung eingeht.

— ⁴⁾ Für die Doppler-Breite wurde nach H. A. Bethe u. G. Placzek, l. c. gesetzt: $\Delta = 4 \sqrt{m \varepsilon_g k T / M}$. m = Neutronenmasse, M = Kernmasse.

Zusammenfassung. Die Absorption der Resonanzneutronen läßt sich sowohl beim Rhodium als auch beim Iridium durch einen Dispersionsansatz für die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Energie richtig wiedergeben. Dabei ergibt sich für den Absorptionskoeffizienten an der Stelle maximaler Absorption beim Rhodium ein Wert von $K'_0 = 25 \text{ cm}^2/\text{g}$ und beim Iridium $K_0 = 17 \text{ cm}^2/\text{g}$. Der Abstand des Iridium-Resonanzniveaus von dem des Rhodiums ist nicht größer als etwa eine Linienbreite. Die Strahlungsbreite des Resonanzniveaus hat beim Iridium und beim Rhodium einen Wert von $I' \simeq I'' = 0,1$ bis $0,2$ Volt. Die Doppler-Breite ist also in beiden Fällen kleiner als die entsprechende Strahlungsbreite.

Frau Prof. Dr. L. Meitner danke ich für das der Arbeit entgegengebrachte freundliche Interesse.

Über eine thermodynamische Berechnung der Ionisation.

Von **Karl-Heinrich Riewe** in Berlin-Wilmersdorf.

(Eingegangen am 2. November 1937.)

Es wird gezeigt, daß die nach Saha benannte Formel zur Berechnung des Ionisationsgrades aus der von M. Planck berechneten Zustandssumme eines teilweise ionisierten Gases hergeleitet werden kann unter der Annahme, daß die Kerne ruhen.

1. Die bisherigen, durchaus erfolgreichen Ansätze zur Berechnung des thermischen Ionisationsgrades in Gasen gehen aus vom chemischen Gleichgewicht zwischen Elektronen-, Ionen- und Atomgas und stellen den Ionisationsgrad c dar durch die nach Saha benannte Formel¹⁾

$$\frac{c^2}{1-c^2} = \frac{(2\pi m_0)^{3/2}}{h^3 p} \cdot (kT)^{5/2} \cdot e^{-\frac{\Theta_j}{T}} = \frac{G(t)}{p}, \quad (1)$$

worin m_0 die Elektronenmasse, T die absolute Temperatur, p den Druck, h und k die Boltzmannsche und Plancksche Konstante und $\Theta_j = \varepsilon U_j/k$ (mit Elementarladung ε und Ionisationsspannung U_j) die „charakteristische Ionisationstemperatur“ bedeuten.

Es ist indessen im Zusammenhang mit einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit über die Ionisationswärmeleitung in Gasen²⁾ von großem Interesse, daß es noch einen anderen, vielleicht sogar einfacheren Weg gibt, aus rein thermodynamischen Gedankengängen heraus zu einer zahlenmäßigen Aussage über den Ionisationsgrad c zu kommen: Beim Vorliegen einer teilweisen Ionisation befinden sich nicht alle Atome (besser: Elektronen) in den Termen unterhalb der Ionisationsgrenze. Die Summierung über die Besetzungswahrscheinlichkeiten dieser Terme ergibt also nicht den Wert 1, sondern einen kleineren. Da der restliche Teil der Atome ionisiert sein muß, ergibt diese Summierung den Wert $(1-c)$.

Die Berechnung der Ionisation ist damit ohne explizite Benutzung des Ausdrucks für die Entropiekonstanten auf das Problem der Besetzungswahrscheinlichkeit der Elektronenterme und also der Zustandssumme eines teilweise ionisierten Gases zurückgeführt.

¹⁾ Vgl. z. B. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen 1928; M. Pannekoek, Handb. d. Astrophys., Bd. III, S. 264; M. Knoll, F. Ollendorf, R. Rompe, Gasentladungstabellen 1935, S. 93. — ²⁾ K.-H. Riewe u. R. Rompe, ZS. f. Phys. **105**, 478, 1937.

2. Die Wahrscheinlichkeit A_i , ein Atom auf dem Energieniveau i anzutreffen, ist gegeben durch

$$A_i = \frac{g_i}{Z} e^{-\frac{\Theta_i}{T}} = \frac{g_i}{Z} \cdot e^{-\frac{\Theta_j}{T}} \cdot e^{-\frac{\Theta_i^*}{T}}.$$

Hierin ist g_i das Gewicht und $\Theta_i = \varepsilon U_i/k$ die (negative) charakteristische Temperatur des Terms, Z die Zustandssumme und Θ_i^* die (positive) charakteristische Termtemperatur vom Grundzustand ($-|\Theta_j|$) an gerechnet. Die Zustandssumme Z ist von M. Planck für ein teilweise ionisiertes Gas berechnet worden¹⁾. Sie setzt sich zusammen aus drei Faktoren, von denen der erste der thermischen Kernbewegung, der zweite der thermischen Bewegung aller freionisierten Elektronen und der dritte der Zustandssumme der Terme aller noch an Kerne gebundenen Elektronen entspricht. Wir wollen zunächst die Kerne als *ruhend* ansehen und den entsprechenden Ausdruck der Zustandssumme gleich 1 setzen. Die beiden restlichen Faktoren lauten:

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{e (2 \pi m_0 k T)^{3/2}}{c^2 h^3 N} \right)^c \cdot \left(\frac{1}{1-c} \sum_n g_n e^{-\frac{\Theta_n}{T}} \right)^{1-c} \\ &= \frac{(1+c)^c}{c^{2c} (1-c)^{1-c}} \left(\frac{e (2 \pi m_0)^{3/2} (k T)^{5/2}}{h^3 p} \right)^c \cdot \left(\sum_n g_n e^{-\frac{\Theta_n}{T}} \right)^{1-c}. \quad (2) \end{aligned}$$

Dabei ist im zweiten Teil der Gleichung die Konzentration von Kernen und Elektronen $N = p/(1+c) k T$ gesetzt, was bei räumlich konstantem Druck p und bei idealem Verhalten der beteiligten Gase erlaubt ist.

Weiterhin muß, wie wir oben sahen, die Wahrscheinlichkeit, ein Atom auf einem der diskreten Termniveaus anzutreffen, gleich $(1-c)$ sein, also beim Einsetzen der obigen Zustandssumme:

$$\sum_n A_n = \frac{c^{2c} (1-c)^{1-c}}{(1+c)^c} \cdot \frac{\sum_n g_n e^{-\frac{\Theta_n}{T}}}{\left(\frac{e (2 \pi m_0)^{3/2} (k T)^{5/2}}{h^3 p} \right)^c \left(\sum_n g_n e^{-\frac{\Theta_n}{T}} \right)^{1-c}} = 1 - c. \quad (3)$$

Wir haben damit eine Gleichung gewonnen, in der nur noch der Ionisationsgrad c als Unbekannte vorkommt. Nach einigen Umformungen wird daraus

$$\frac{c^2}{1-c^2} = \frac{e (2 \pi m_0)^{3/2}}{h^3 p \left(\sum_n g_n e^{-\frac{\Theta_n^*}{T}} \right)} \cdot (k T)^{5/2} \cdot e^{-\frac{\Theta_j}{T}} = e \cdot \frac{G(T)}{p}. \quad (4)$$

¹⁾ M. Planck, Ann. d. Phys. **75**, 673, 1924; Formel (39).

Das Ergebnis stimmt in allen wesentlichen Punkten mit der Formel (1) überein. Die auftretende Termsumme im Nenner steht bei exakter Schreibweise auch in der Formel von Saha, kann jedoch bei entsprechender Normierung der Termgewichte fast immer gleich 1 gesetzt werden.

3. Der einzige Unterschied ist der Faktor e . Er kommt in der Herleitung¹⁾ dadurch herein, daß die Stirlingsche Formel benutzt wird: Die Zustandssumme *eines* freien Elektrons im Volumen V beträgt

$$Z(1) = (2\pi m_0 k T)^{3/2} \cdot V/h^3.$$

Für cM freie Elektronen im gleichen Volumen wird sie dadurch berechnet, daß alle bis auf eines in bestimmten Energiezuständen gedacht werden und nur dies eine variiert wird. Man erhält so:

$$Z(1) \cdot Z(cM - 1).$$

Und bei Anwendung dieses Verfahrens auf alle cM freien Elektronen infolge „einer unter den vorliegenden Verhältnissen genügenden Näherung der Stirlingschen Formel“:

$$\frac{Z^{cM}}{(cM)!} = \left(\frac{Z \cdot e}{cM}\right)^{cM} = \left(\frac{e(2\pi m_0 k T)^{3/2}}{cN h^3}\right)^{cM}. \quad (5)$$

Es wurde also $\sqrt[2\pi cM]{1} = 1$ gesetzt, was deshalb berechtigt ist, weil späterhin die M -te Wurzel gezogen wird zur Berechnung der Zustandssumme für *ein* Teilchenpaar (Ion plus Elektron). Der Faktor e steht also in keinem Zusammenhang mit der Annahme ruhender Kerne. —

28. Oktober 1937.

¹⁾ M. Planck, Ann. der Phys. **75**, 673, 1924; Formel (28).

Über die Winkelabhängigkeit bei der Streuung von Neutronen an Protonen.

Von Ernst Philipp.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Oktober 1937.)

Auf Grund neuerer Experimente, welche Abweichungen von der sphärisch-symmetrischen Verteilung der Neutronen im Schwerpunktsystem ergeben haben, und der allgemeinen Theorie der elastischen Streuung nebst der Hypothese des einfachen Potentialloches werden der Wert des Wechselwirkungspotentials zwischen Neutronen und Protonen und seine Permutationseigenschaften untersucht. In Verbindung mit der Deuterontheorie folgt daraus die Notwendigkeit von Austauschkräften: für diese werden Bedingungsgleichungen aufgestellt, welche aber zur Bestimmung der Potentiale auf Grund der derzeit vorliegenden Experimente nicht ausreichen.

I. Einleitung.

Bei dem unsicheren Stand der gegenwärtigen Kerntheorie wendet sich naturgemäß denjenigen Problemen besonderes Interesse zu, bei welchen die wesentlichen Ansätze der Theorie möglichst unbeschwert von mathematischen Komplikationen und frei von weiteren speziellen Hypothesen zutage treten. Leider ist aber das zu einem einzelnen Problem der Kernphysik gehörige experimentelle Material meistens sehr beschränkt und außerdem selten genau, so daß eine Erweiterung der ursprünglichen Frage fast nie vermeidbar sein wird. So kann auch der Gegenstand der vorliegenden Arbeit nicht ohne Heranziehung einer anderen Eigenschaft des Systems Proton-Neutron, nämlich der Bindungsenergie des Deuterons, behandelt werden, und die Folgerungen dieser Untersuchung werden gerade aus der simultanen Betrachtung dieser beiden Probleme fließen.

Einige allgemeine Bemerkungen über den Charakter des Problems Proton-Neutron seien noch vorausgeschickt. Da man sich, nach Heisenberg und Iwanenko, die Atomkerne aus Protonen und Neutronen, welche den Gesetzen der unrelativistischen Quantentheorie unterworfen sind, aufgebaut denkt, wäre bei bekannten Kraftgesetzen Neutron-Proton, Proton-Proton, Neutron-Neutron ein großer Teil der Kernphysik prinzipiell zu beherrschen; diese Kräfte besitzen nun, abgesehen von der allenfalls überlagerten Coulomb-Anziehung, kein klassisches Analogon und können deshalb nur durch Rückrechnung aus den experimentellen Daten ermittelt werden. Den unmittelbarsten Zugang hierzu bietet nun für den Fall Neutron-Proton die Theorie dieser beiden Partikeln allein, einerseits im freien, andererseits im gebundenen Zustand, d. h. die Streutheorie und die

Berechnung der Bindungsenergie. Diese Probleme haben außer ihrer relativen Einfachheit gegenüber den anderen Fragen der Kerntheorie den Vorteil einer beinahe unbestreitbaren Geltung der Quantenmechanik. Jeder Kern stellt sich bekanntlich mathematisch dar als die Fortsetzung des quantentheoretisch erledigten Problems freier Elementarteilchen in Wechselwirkung in das Gebiet negativer Zustände im Energiespektrum, wobei nur vorausgesetzt ist, daß dem Neutron für sich allein die üblichen Eigenschaften einer Elementarpartikel zukommen, was nach den Experimenten durchaus plausibel ist. Dieser formelle Zusammenhang ist aber bei keinem anderen Kern so zwanglos einer *physikalischen* Interpretation fähig wie beim Deuteron, welches sich nämlich durch Stöße aus zwei Elementarteilchen bilden kann, sofern zugleich die Aussendung eines Lichtquants, ein gleichfalls bekannter Prozeß, statthat. Zur Übertragung dieses Mechanismus auf andere Kerne wären, wenn man von Elementarteilchen ausgeht, mindestens Dreierstöße notwendig, deren Wahrscheinlichkeit aber unter normalen Verhältnissen sehr klein ist. Für den Fall Neutron-Proton ist also das Kernproblem nicht bloß mathematisch sondern auch anschaulich in recht überzeugender Weise mit einem gewöhnlichen quantentheoretischen Problem verknüpft, woraus in diesem Falle die Zulässigkeit der Quantenmechanik fast von selbst erhellt.

Noch augenfälliger ist die ausgezeichnete Stellung unseres Problems in mathematischer Hinsicht: da ein Zweikörperproblem vorliegt, welches, wie sich zeigen wird, auf ein Einkörperproblem führt, können ohne Benutzung von Näherungsmethoden exakte Lösungen (wenn auch natürlich nicht notwendigerweise in elementarer, geschlossener Form) angegeben werden. Dies ist ausnehmend günstig, weil die näherungsweise Berechnungen der Bindungsenergie äußerst unzuverlässig sind ¹⁾. Die Streuung an schweren Kernen andererseits kann nur vermöge der ziemlich groben Vereinfachung des Zweikörpermodells mathematisch behandelt werden; die Berechtigung dieses Vorganges ist aber im allgemeinen schwer zu erweisen.

Die Bedeutung des Neutron-Proton-Problems für die Kernphysik dürfte durch diese Andeutungen hinlänglich umrissen sein; es ist aber nicht zu übersehen, daß man sich mit diesem Problem — gleichsam als Kehrseite seiner Einfachheit, weil nämlich darin die Anordnung der Elementarbestandteile in den Kernen und die hieraus folgenden Gesetzmäßigkeiten gar nicht betrachtet werden können — noch im Vorhof des Gebäudes der Kerntheorie befindet.

¹⁾ Vgl. z. B. H. A. Bethe u. R. F. Bacher, Rev. of Mod. Phys. **8**, 149—160, 1936; C. F. v. Weizsäcker, Die Atomkerne. Akad. Verlagsges., 1937. S. 64—82.

11. Die mathematische Theorie der Streuung von Neutronen an Protonen.

Die Behandlung unseres Problems erfolgt nach der allgemeinen Theorie der elastischen Streuung, welche von Gordon, Sexl, Mott¹⁾ und anderen entwickelt worden ist. Im vorliegenden Falle handelt es sich, wenn wirkliche Streuung stattfindet, und nicht etwa Vereinigung der beiden Partikeln nebst Aussendung eines Lichtquants, immer um *elastische* Streuung; denn keines der beiden Teilchen kann Energie aufnehmen, weil eine Elementarpartikel keine angeregten Zustände besitzt. Wir formulieren nun das Problem: Es fällt ein homogener Strahl parallel fliegender Neutronen gegen die Protonen einer Versuchssubstanz ein; es wird nach der Zahl der Protonen gefragt, welche in der Zeiteinheit in den räumlichen Winkel $d\omega(\Theta, \varphi)$ gestreut werden, wobei Θ und φ die Polarwinkel mit der Einfallsrichtung als Achse des raumfesten Systems bedeuten. Die Protonen werden als voneinander unabhängig angesehen, so daß es genügt, die Wechselwirkung eines ruhenden, freien, d. h. nicht oszillierenden Protons mit einem Neutron zu untersuchen. Wir beginnen mit der allgemeinen, unrelativistischen Schrödinger-Gleichung

$$\Delta_p \Phi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_n; q_p, q_n) + \Delta_n \Phi(\dots) + \frac{2m}{h} i \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{2m}{h^2} \mathfrak{B} \Phi = 0$$

($\mathbf{r}_p, q_p; \mathbf{r}_n, q_n$: Ortsvektor und Spinkoordinate des Protons bzw. Neutrons, m die annähernd gleiche Masse der Partikeln), welche nun schrittweise vereinfacht werden soll. Vorerst muß aber der Charakter des Potentials \mathfrak{B} besprochen werden. Es ist aus allgemeinen Erwägungen heraus wahrscheinlich, daß die Kernpotentiale nicht gewöhnliche Funktionen der Orts- und Spinkoordinaten sind, sondern außerdem noch Permutationsooperatoren, definiert durch $P(x_1, x_2; x_3, x_4; \dots) \cdot f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = f(x_2, x_1, x_4, x_3, \dots)$, enthalten, also $\mathfrak{B} = V(r) P$, mit $r = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|$. V ist nämlich, bei Vernachlässigung der kleinen magnetischen Spinwechselwirkung, nur vom Abstand der Partikeln abhängig, was für Elementarteilchen selbstverständlich, ja geradezu eine Definition des Begriffs Elementarpartikel ist. Die in der Kerntheorie gebräuchlichen Potentiale (Wigner-, Majorana-, Heisenberg-, Bartlett-Potentiale), sind der Reihe nach definiert durch die Operatoren $P_w = 1$, $P_m = P(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_n)$, $P_h = P(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_n; q_p, q_n)$, $P_b = P(q_p, q_n)$. Die gewohnte Aufspaltung der Funktion Φ in einen räumlichen und einen Spinfaktor ergibt unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Spinfunktion

¹⁾ W. Gordon, ZS. f. Phys. **48**, 180, 1928; Th. Sexl, Phys. ZS. **35**, 119, 1934; ZS. f. Phys. **99**, 751, 1936; N. F. Mott u. H. S. W. Massey, Theory of Atomic Collisions, Oxford 1935.

entweder symmetrisch oder antisymmetrisch in ihren beiden Koordinaten ist, bekanntlich folgende vier Gleichungen, entsprechend den definierten vier Potentialarten, in deren obiger Reihenfolge:

$$\Delta_p \Psi(r_p, r_n, t) + \Delta_n \Psi(r_p, r_n, t) + \frac{2m}{\hbar} \cdot i \frac{\partial \Psi(r_p, r_n, t)}{\partial t} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \Psi(r_p, r_n, t) = 0, \quad (1)$$

$$\Delta_p \Psi(r_p, r_n, t) + \Delta_n \Psi(r_p, r_n, t) + \frac{2m}{\hbar} \cdot i \frac{\partial \Psi(r_p, r_n, t)}{\partial t} - \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V(r) \Psi(r_n, r_p, t) = 0, \quad (1a)$$

$$\Delta_p \Psi(r_p, r_n, t) + \Delta_n \Psi(r_p, r_n, t) + \frac{2m}{\hbar} \cdot i \frac{\partial \Psi(r_p, r_n, t)}{\partial t} \mp \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \Psi(r_n, r_p, t) = 0, \quad (1b)$$

$$\Delta_p \Psi(r_p, r_n, t) + \Delta_n \Psi(r_p, r_n, t) + \frac{2m}{\hbar} \cdot i \frac{\partial \Psi(r_p, r_n, t)}{\partial t} \mp \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V(r) \Psi(r_p, r_n, t) = 0, \quad (1c)$$

wobei in den beiden letzten Gleichungen das \mp -Zeichen dem symmetrischen, Triplett- bzw. dem antisymmetrischen Singulettzustand entspricht. Im strengen Sinne sind die Gleichungen von Majorana und Heisenberg wegen der Vertauschung der Argumente keine Differentialgleichungen; dessenungeachtet können sie, im wesentlichen wegen ihrer Separierbareigenschaften, ebenso wie die anderen Gleichungen behandelt werden. Im Heisenberg- und Bartlett-Fall muß die Wahrscheinlichkeitsdichte, deren Aufstellung das Ziel der Theorie ist, für den Triplett- und Singulettzustand getrennt berechnet und hierauf die für den realen, experimentellen Fall, in welchem Partikeln mit symmetrischer und Partikeln mit antisymmetrischer Spinfunktion vorkommen, geltende Wahrscheinlichkeitsdichte aus jenen beiden Ergebnissen, gemäß den statistischen Häufigkeiten, den Gewichten, der Zustände zusammengesetzt werden. Demnach sind die mathematischen Typen der Gleichungen mit den Gleichungen (1) und (1a) erschöpft, da von den je zwei Gleichungen des Ansatzes nach Heisenberg bzw. nach Bartlett jede für sich von der Majorana- bzw. Wigner-Gleichung höchstens durch das Vorzeichen von $V(r)$ abweicht. Wir gehen also von der Wignerschen Gleichung aus und merken, wo es notwendig ist, die Änderungen an, welche die Verwendung der Majoranaschen Gleichung verursacht. Da wir eine stationäre Lösung herstellen wollen, fordern wir:

$$\Psi(r_p, r_n, t) = u(r_p, r_n) \cdot e^{-i \frac{E_0}{\hbar} \cdot t} \quad (2)$$

und erhalten aus Gleichung (1):

$$\Delta_p u + \Delta_n u + \frac{2m}{h^2} (E_0 - V(r)) \cdot u = 0.$$

Nun führen wir zur Separation der Gleichung neue Koordinaten ein, nämlich die Relativkoordinaten $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p$ und die Schwerpunktskoordinaten $\mathbf{r}_s = \frac{\mathbf{r}_p + \mathbf{r}_n}{2}$. Die Rechnung ergibt zur Bestimmung der

Schwerpunktsbewegung, welche aber nicht von Belang ist, die Gleichung einer freien Eigenschwingung und in den Relativkoordinaten die Gleichung

$$\Delta \psi(\mathbf{r}) + \frac{2\mu}{h^2} E \cdot \psi(\mathbf{r}) - \frac{2\mu}{h^2} V(r) \cdot \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \left(r = |\mathbf{r}|, \mu = \frac{m}{2} \right); \quad (3)$$

in der Majorana-Gleichung steht im letzten Glied wegen der Vertauschung von Proton und Neutron $\psi(-\mathbf{r})$. Gleichung (3) beschreibt die Bewegung einer Partikel der Masse μ im Felde $V(r)$, welche nach der Versuchsbedingung sich längs einer Geraden in unendlicher Entfernung gleichmäßig mit derselben Geschwindigkeit v bewegt wie das einfallende Neutron; denn das Proton ist ja im ursprünglichen, experimentellen System als ruhend angenommen worden, sofern sich das Neutron auf der einen Seite der Einfallgeraden, unserer Z -Achse, in unendlicher Entfernung befindet. Nach dem Energiesatz gilt, weil sicherlich

$$V(r) \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty, \quad E = \frac{\mu}{2} v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = \frac{1}{2} E_0,$$

wenn E_0 die kinetische Energie des einfallenden Neutrons im ursprünglichen Koordinatensystem bezeichnet. Nun transformieren wir Gleichung (3) auf Polarkoordinaten in bezug auf die oben angegebene Z -Achse und setzen gleichzeitig, mit ϑ als Azimut, $\partial/\partial\vartheta = 0$, eine Annahme, welche wegen der Kugelsymmetrie des Potentials und der Rotationssymmetrie der Anordnung in bezug auf die Z -Achse gerechtfertigt ist. Hieraus resultiert die Gleichung

$$\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \right\} + \frac{2\mu}{h^2} E \cdot \psi - \frac{2\mu}{h^2} V(r) \psi = 0. \quad (4)$$

Jede Gleichung dieser Form besitzt partikuläre Integrale

$$\psi_l(r, \vartheta) = \frac{1}{r} \chi_l(r) \cdot P_l(\cos \vartheta), \quad (4')$$

darin ist $P_l(x)$ die l -te Legendresche Kugelfunktion, welche durch die Formel von Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l \{(x^2 - 1)^l\}}{d x^l}$$

definiert werden kann. In der Majoranaschen Fassung der Gleichung (4) tritt im letzten Glied an Stelle der Funktion $\psi_l(r, \vartheta)$ die Funktion $\psi_l(r, \pi - \vartheta)$, weil in der Gleichung (3) im Majoranaschen Falle im letzten Glied $\psi(-r)$ steht und der Polarwinkel von $(-r)$: $(\pi - \vartheta)$ ist. Man kann die Gleichungen der vier Typen für die Funktionen $\chi_l(r)$ — mit Berücksichtigung von $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ — folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi_l(r)}{dr^2} + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} E - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \chi_l(r) \\ = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \cdot \{1, (-1)^l, (-1)^{l+p}, (-1)^p\}, \quad (5), (5a), (5b), (5c) \end{aligned}$$

wobei $p = 0, 1$ zu einer symmetrischen bzw. antisymmetrischen Spinfunktion gehört. Die Vergleichung von (5) und (5a, b, c) zeigt, daß die Berechnung von $\chi_l(r)$ in allen Fällen gleich verläuft; man hat nur allenfalls in der Endformel $V(r)$ durch $-V(r)$ zu ersetzen. Wir schreiten nun in der Behandlung der Gleichung (5) vor, indem wir allem weiteren eine spezielle Annahme über die analytische Form — nicht über den Permutationsoperator — des Potentials $V(r)$ zugrunde legen, und zwar:

$$V(r) = \text{Const} = V \quad \text{für } r < r_0, \quad V(r) = 0 \quad \text{für } r \geq r_0^1); \quad (6)$$

r_0 , anschaulich der Kernradius, ist von der Größenordnung 10^{-13} cm. Diese Annahme erleichtert wesentlich die numerischen Rechnungen und verdient überdies, da, wie es den Anschein hat, die gegenwärtige Theorie eher modellmäßig als endgültig ist, auch vom kritischen Standpunkt aus, nämlich als einfachstes Modell, vor komplizierteren Funktionen wie e^{-ax} , e^{-ax^2} und anderen, den Vorzug. In Gleichung (5) substituieren wir, mit Verwendung von Gleichung (6)

$$\chi_l(r) = \sqrt{\varrho} \cdot f_l(\varrho) \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\hbar} \cdot \sqrt{2\mu E}$$

und erhalten für den Außenraum ($r \geq r_0$):

$$\frac{d^2 f_l(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{df_l(\varrho)}{d\varrho} + \left\{ 1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{\varrho^2} \right\} f_l(\varrho) = 0, \quad (7)$$

mit $\varrho = kr$; für den Innenraum ($r < r_0$) gilt dieselbe Gleichung, worin nun aber $\varrho = nkr$ mit $n = \sqrt{\frac{E-V}{E}}$ (Brechungsindex). Gleichung (7)

¹⁾ Der Ansatz (6) und die daraus folgende Zerlegung des Raumes ist in der Kerntheorie schon seit längerem bekannt; seine Anwendung auf Streuprobleme ist von Sexl (l. c.) gegeben worden.

ist die Besselsche Differentialgleichung der Ordnung $l + \frac{1}{2}$; deshalb erhalten wir als Lösung im Innen- bzw. Außenraum

$$Z_l^{(i)}(r) = \sqrt{nkr} \cdot Z_{l+1/2}(nkr), \quad Z_l^{(a)}(r) = \sqrt{kr} \cdot Z_{l+1/2}(kr), \quad (8)$$

wobei $Z_{l+1/2}$ das allgemeine Integral der Gleichung (7), d. h. eine Linearkombination einer Besselschen und einer Neumannschen Funktion $aI_{l+1/2} + bN_{l+1/2}$ bedeutet. Man sieht sogleich ein, daß als Lösung von Gleichung (7) für den Innenraum nur Funktionen der Form

$$\text{Const} \cdot \sqrt{nkr} I_{l+1/2}(nkr)$$

in Betracht kommen, da jede andere Lösung die Neumannsche Funktion enthalten muß und deshalb wie $1/r^l$ unendlich wird; nach Gleichung (4') würde dann die partikuläre Lösung

$$\psi_l^{(i)}(r, \vartheta) = \frac{1}{r} Z_l^{(i)}(r) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

für $r = 0$ unendlich wie $1/r^{l+1}$, also für jedes $l \geq 0$ singulär werden. Die allgemeine Lösung der Gleichung (4) im Innenraum lautet also:

$$\psi_i(r, \vartheta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{n}{kr}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) A_l \cdot I_{l+1/2}(nkr_0) \cdot P_l(\cos \vartheta). \quad (9)$$

Die Lösung von Gleichung (4) im Außenraum kann man allgemein in der Form

$$\psi_a(r, \vartheta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{kr}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \{I_{l+1/2}(kr) + \frac{1}{2} C_l [I_{l+1/2}(kr) + d_l N_{l+1/2}(kr)]\} P_l(\cos \vartheta) \quad (10)$$

ansetzen. Zur Bestimmung der Konstanten A_l, C_l, d_l fordert man, daß die Lösungsfunktion glatt sein soll, d. h. daß die Funktionen (9) und (10) nebst ihren ersten Ableitungen an der Stelle $r = r_0$ stetig ineinander übergehen sollen; außerdem wird uns dazu die asymptotische Form der Lösung verhelfen, indem wir sie mit der physikalischen Randbedingung des Streuproblems vergleichen. Wegen der Formel von Rayleigh¹⁾

$$\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) I_{l+1/2}(kr) \cdot P_l(\cos \vartheta) = e^{ikr \cdot \cos \vartheta} \quad (11)$$

¹⁾ Formel (11) zeigt den Zweck der auf den ersten Blick etwas gekünstelt erscheinenden Konstantenwahl in den Formeln (9) und (10). Zum Beweis der Formel (11) vgl. Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. 2, S. 867. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1935. 2. Aufl.

enthält Gleichung (10) die Lösung für den kräftefreien Raum, da $e^{i k r \cdot \cos \vartheta}$ eine ebene Welle — also das wellenmechanische Bild des einfallenden Neutronenstrahles darstellt. Dann verschwindet der Unterschied zwischen Innen- und Außenraum und Gleichung (11) würde im ganzen Raum gelten; in diesem Falle wäre aber auch $n = 1$, so daß ψ_i ebenfalls auf die Form der Gleichung (11) gebracht werden könnte. Der zusätzliche Term

$$\sqrt{\frac{\pi}{2 k r}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{C_l}{2} \{I_{l+1/2}(kr) + d_l N_{l+1/2}(kr)\} \cdot P_l(\cos \vartheta) \quad (11')$$

gibt die eigentliche Streuung wieder, und soll demnach der allgemeinen Form einer Streuwelle in unendlicher Entfernung vom Ursprung angepaßt werden. Da die Lösungen der partiellen Differentialgleichung (4) erst durch Angabe ihres Verhaltens auf Flächenstücken festgelegt werden, kann auf die Hinzufügung einer solchen Randbedingung, nämlich der asymptotischen Form der Funktion für $r \rightarrow \infty$, also ihrer Gestalt auf der „unendlich fernen“ Kugel, gar nicht verzichtet werden, und zur Anwendung des mathematischen Formalismus der Quantentheorie auf ein konkretes physikalisches Problem ist eine, sozusagen von außen kommende, Annahme unumgänglich notwendig. Die Streuwelle sei also eine Kugelfunktion der Gestalt

$$\frac{1}{r} e^{i k r} \cdot f(\vartheta); \quad (12)$$

es ist hier, wie auch bei Gleichung (11) zu beachten, daß Sinus- oder Cosinusfunktionen statt der imaginären e -Potenz wegen Gleichung (2) stehende, nicht aber fortschreitende Wellen beschreiben würden. Wir fordern nun, gemäß den obenstehenden Erörterungen, daß der Ausdruck (11') für $r \rightarrow \infty$ asymptotisch die Form (12) annehme. Die hierzu nötigen asymptotischen Entwicklungen der Zylinderfunktionen lauten:

$$I_\lambda(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{2\lambda+1}{4} \cdot \pi\right), \quad N_\lambda(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin\left(z - \frac{2\lambda+1}{4} \cdot \pi\right). \quad (12')$$

Diese ergeben unmittelbar $d_l = i$; dann allein gilt nämlich

$$\frac{C_l}{2} \{I_{l+1/2}(kr) + d_l N_{l+1/2}(kr)\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \cdot e^{i k r} \cdot C_l \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}(l+1)},$$

was zur gewünschten Form (12) führt. Über die Konstanten C_l gibt die asymptotische Randbedingung keine Auskunft; doch steht uns zur Berechnung dieser Größen noch die schon erwähnte Stetigkeitsbedingung an der

Stelle $r = r_0$ zur Verfügung. Bevor wir diese auswerten, schreiben wir noch die endgültige Form der Funktion ψ_a an:

$$\psi_a = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \cdot \{I_{l+1/2}(kr) + \frac{1}{2} C_l H_{l+1/2}^{(1)}(kr)\} \cdot P_l(\cos \vartheta), \quad (13)$$

wo $H_{l+1/2}^{(1)}$ die erste Hankelsche Funktion, definiert durch $H_{\lambda}^{(1)}(z) = I_{\lambda}'(z) + iN_{\lambda}(z)$ bezeichnet. Die Stetigkeitsbedingungen lauten:

$$\psi_a(r_0 \vartheta) = \psi_i(r_0 \vartheta), \quad \left\{ \frac{d\psi_a(r \vartheta)}{dr} \right\}_{r=r_0} = \left\{ \frac{d\psi_i(r \vartheta)}{dr} \right\}_{r=r_0}. \quad (14)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Entwicklungen von ψ_a und ψ_i nach Legendreschen Funktionen, welcher physikalisch der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses entspricht, lassen sich die Gleichungen (14) in Gleichungen für die einzelnen l aufspalten. So ergibt sich, nach Weglassung gemeinsamer Faktoren:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} A_l I_{l+1/2}(nkr_0) &= I_{l+1/2}(kr_0) + \frac{1}{2} C_l H_{l+1/2}^{(1)}(kr_0), \\ n \sqrt{n} A_l I_{l+1/2}'(nkr_0) &= I_{l+1/2}'(kr_0) + \frac{1}{2} C_l H_{l+1/2}^{(1)'}(kr_0), \end{aligned} \quad (14a)$$

wobei die zweite Gleichung (14a) mit Hilfe der ersten vereinfacht ist. Aus Gleichung (14a) folgt:

$$C_l = -2 \cdot \frac{n \cdot I_{l+1/2}(kr_0) \cdot I_{l+1/2}'(nkr_0) - I_{l+1/2}(nkr_0) \cdot I_{l+1/2}'(kr_0)}{n H_{l+1/2}^{(1)}(kr_0) \cdot I_{l+1/2}'(nkr_0) - I_{l+1/2}(nkr_0) \cdot H_{l+1/2}^{(1)'}(kr_0)}, \quad (15)$$

welche Formel die Grundlage der numerischen Rechnungen bildet. Für A_l gilt eine ähnliche Formel, die jedoch für das vorliegende Problem nicht benötigt wird. Sind E_0, r_0, V bekannt, so kann C_l nach Gleichung (15) berechnet werden, womit das Problem, bei bekannten Operatoren, prinzipiell erledigt ist. Wir wollen nun in Kürze die hier angewendete Methode von Sexl mit der von Mott²⁾ zur Behandlung desselben Problems benutzten vergleichen. Mott nimmt eine stetige Potentialfunktion an und bedarf infolgedessen nur einer ψ -Funktion, welche an der Stelle $r = 0$ regulär bleiben soll und durch die asymptotische Randbedingung für $r \rightarrow \infty$ auf das vorliegende Problem bezogen wird. Die Methode von Sexl hingegen erfordert für die zwei Funktionen ψ_a und ψ_i vier Randbedingungen, nämlich für ψ_i Regularität an der Stelle $r = 0$ und die zwei Stetigkeitsbedingungen

1) $I_{l+1/2}'(kr_0)$ bedeutet $\left\{ \frac{dI_{l+1/2}(kr)}{dr} \right\}_{r=r_0}$ usw. — 2) Vgl. z. B. N. F. Mott u. H. S. W. Massey, l. c.

an der Stelle $r = r_0$, für ψ_a die nämlichen Stetigkeitsbedingungen und die asymptotische Form. Wie die voranstehende Darstellung zeigt, liefert diese Methode die Wellenfunktion im ganzen Raum, während die Mottsche im allgemeinen nur die asymptotische Entwicklung der Wellenfunktion herstellt, was bei unserem Problem allerdings genügt. Zur numerischen Rechnung pflegt man bei Benutzung der Mottschen Methode Näherungslösungen zu benutzen, deren Zuverlässigkeit oft fraglich ist.

Wir stellen nun, von Gleichung (13) ausgehend, die gesuchte Streuformel auf, nämlich die asymptotische Entwicklung der Funktion $\psi_a(r \rightarrow \infty, \vartheta)$. Der erste Term gibt, wie schon erwähnt, exakt $e^{ikr \cdot \cos \vartheta}$, im zweiten setzen wir nach den Formeln (12'):

$$H_{l+1/2}^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \cdot e^{i(kr - \frac{l+1}{2} \cdot \pi)}$$

ein und erhalten mit Benutzung von $i^l = (e^{+i\frac{\pi}{2}})^l = e^{i\frac{l}{2} \cdot \pi}$ schließlich:

$$\psi_a(r \rightarrow \infty, \vartheta) \sim e^{ikr \cdot \cos \vartheta} + e^{ikr} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left\{ -\frac{i}{2k} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l \cdot P_l(\cos \vartheta) \right\}. \quad (16)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem Kugelflächelement anzutreffen, beträgt für die gestreute Kugelwelle:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{4k^2} \left| \sum \right|^2 \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi;$$

Integration über φ ergibt

$$W = \frac{\pi}{2k^2} \cdot \left| \sum_{l=0}^{\infty} \{ (2l+1) \cdot C_l \cdot P_l(\cos \vartheta) \} \right|^2 \cdot \sin \vartheta d\vartheta \quad (17)$$

als Wahrscheinlichkeitsfunktion für eine infinitesimale Kugelzone, deren Erzeugende den Winkel ϑ mit der Einfallsrichtung des Teilchens im System der Relativkoordinaten einschließt. Für Bartlett- und Heisenberg-Kräfte tritt, nach einer früheren Bemerkung, an Stelle von Gleichung (17) die Formel:

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2k^2} \cdot \left\{ 3 \left| \sum_{l=0}^{\infty} {}^{(1)} (2l+1) C_l P_l(\cos \vartheta) \right|^2 + \left| \sum_{l=0}^{\infty} {}^{(2)} (2l+1) C_l P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \right\} \cdot \sin \vartheta d\vartheta, \quad (17a)$$

wobei zu $\Sigma^{(1)}$ eine symmetrische, zu $\Sigma^{(2)}$ eine antisymmetrische Spinfunktion gehört: die Gewichte der beiden Spinzustände verhalten sich nämlich wie 3 : 1.

Es ist nun zu erörtern, welche Veränderungen an den erhaltenen Formeln die quantenmechanische Gleichartigkeit der am Stoße beteiligten Teilchen notwendig machen würde. Physikalisch sind Neutron und Proton zwar wohl unterschieden, und diese Unterscheidung kann, sofern die Teilchen voneinander getrennt sind, durch Versuche (z. B. in der Wilson-Kammer) stets durchgeführt werden. Andererseits aber ist, wegen der annähernden Massengleichheit der beiden Partikeln, die Hamilton-Funktion der verwendeten Schrödinger-Gleichung symmetrisch in den beiden Teilchen, und gerade diese Symmetrie gilt ja im allgemeinen als das mathematische Äquivalent der Ununterscheidbarkeit, d. h. der Vertauschbarkeit, wobei an einen Ladungsaustausch gedacht werden mag. Deswegen muß auch die Streuformel für gleichartige Teilchen aufgestellt werden, was, weil Elementarteilchen untersucht werden, auf Grund der Fermi-Statistik zu geschehen hat. Demnach muß bei symmetrischer Spinfunktion die räumliche Wellenfunktion antisymmetrisch sein und umgekehrt, damit die vollständige Funktion, als Produkt der räumlichen und der Spinfunktion, antisymmetrisch in den beiden Teilchen werde. Die räumlich symmetrische Streufunktion ist:

$$\mathfrak{S} = \psi(r, \vartheta) + \psi(r, \pi - \vartheta),$$

die räumlich antisymmetrische:

$$\mathfrak{A} = \psi(r, \vartheta) - \psi(r, \pi - \vartheta),$$

da bei Vertauschung der Teilchen ϑ in $\pi - \vartheta$ übergeht. Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte ist dann:

$$\frac{|\mathfrak{S}|^2 + 3|\mathfrak{A}|^2}{4}, \quad (18)$$

da \mathfrak{S} zum Singulett-, \mathfrak{A} zum Triplettzustand gehört. Für einen individuellen Stoß gilt, nach dem Pauli-Verbot, selbstverständlich entweder \mathfrak{S} oder \mathfrak{A} , nicht aber irgendeine Vereinigung der beiden Funktionen. Ihre Zusammensetzung in Formel (18) bedeutet, daß bei den beobachteten Stößen Paare symmetrischer und antisymmetrischer Spinfunktionen gemischt vorkommen und daß das Mischverhältnis 3:1 beträgt. Nun gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(r \rightarrow \infty, \vartheta) &\sim -\frac{i}{2k} \cdot e^{ikr} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cdot C_l \cdot P_l(\cos \vartheta) \right. \\ &\left. + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cdot C_l \cdot (-1)^l P_l(\cos \vartheta) \right\} = \frac{e^{ikr}}{r} \cdot -\frac{i}{k} \cdot \sum_{l=0(2)}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich:

$$\mathfrak{A}(r \rightarrow \infty, \vartheta) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{i}{k} \cdot \sum_{l=1(2)}^{\infty} (2l+1) \cdot C_l P_l(\cos \vartheta),$$

und für die Wahrscheinlichkeitsfunktion, bei gleicher geometrischer Bedingung wie in Gleichung (17):

$$W = \frac{\pi}{2k^2} \left\{ \left| \sum_{l=0(2)}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \vartheta) \right|^2 + 3 \left| \sum_{l=1(2)}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \right\}. \quad (17b)$$

Die C_l werden dabei nach Gleichung (15) berechnet, aber die Potentiale, und infolgedessen die Brechungsindizes n , sind auch bei festem l für Heisenberg- oder Bartlett-Kräfte in \mathfrak{S} und \mathfrak{A} voneinander verschieden, ebenso wie bei fester Spinfunktion für Heisenberg- oder Majorana-Kräfte bei $l \equiv 0(2)$ und $l \equiv 1(2)$.

Zum Abschluß dieses Teiles ersetzen wir den Winkel ϑ in den Gleichung (17) usw. durch den Streuwinkel des Protons im experimentellen System, damit wir dann direkt unsere theoretischen mit den gemessenen Wirkungsquerschnitten vergleichen können; wir wählen den Streuwinkel des Protons, weil dessen Bahn und nicht die des Neutrons in der Wilson-Kammer beobachtet wird. Der Winkel ϑ des Systems der Relativkoordinaten ist nun gleich dem Winkel, welchen die Verbindungslinien Schwerpunkt-Neutron mit der vorgegebenen Einfallrichtung einschließt, also dem Streuwinkel des Neutrons im Ruhssystem des Schwerpunktes, und zwar aus rein geometrischen Gründen, weil nämlich der Schwerpunkt nach seiner Definition auf der Verbindungsstrecke Proton-Neutron liegt und auch die Orientierung der Strecken Proton-Neutron und Schwerpunkt-Neutron die gleiche ist. Es seien $v_{||}$ und v_{\perp} die Komponenten der Neutronengeschwindigkeit im Schwerpunktsystem parallel bzw. normal zur Einfallrichtung, v der Betrag der wirklichen Einfallsgeschwindigkeit des Neutrons, $V_{||}$, V_{\perp} die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten des Protons im ursprünglichen System. Im Ruhssystem des Schwerpunktes müssen natürlich Proton- und Neutronengeschwindigkeit einander entgegengesetzt gleich und deshalb dem Betrag nach gleich $\frac{1}{2}v$ sein, damit die Relativgeschwindigkeit v bleibe. Also gilt:

$$v = \frac{1}{2}v \cdot \cos \vartheta, \quad v = \frac{1}{2}v \cdot \sin \vartheta, \quad V_{||} = (-\frac{1}{2}v \cdot \cos \vartheta) + \frac{1}{2}v,$$

$$V_{\perp} = (-\frac{1}{2}v \cdot \sin \vartheta).$$

Hieraus folgt:

$$|V| = \sqrt{V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2} = v \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Der Streuwinkel Θ des Protons im experimentellen System ist nun gegeben durch

$$\cos \Theta = \frac{V_{\parallel}}{|V|} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right);$$

also gilt:

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}. \quad (19)$$

Diesen Winkel Θ führen wir nun in Gleichung (17) ein und erhalten wegen $\cos \vartheta = -\cos 2\Theta$:

$$W_I = \frac{2\pi}{k^2} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l (-1)^l P_l(\cos 2\Theta) \left| \sin \Theta \cos \Theta \right|^2 \sin \Theta \cos \Theta d\Theta, \quad (20)$$

als Wahrscheinlichkeitsfunktion für die infinitesimale Kugelzone des experimentellen Systems. Bei Formel (17b) fällt der Faktor $(-1)^l$ in den unendlichen Summen heraus, da in jeder derselben nur Glieder mit geraden bzw. ungeraden l vorkommen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Einheit des räumlichen Winkels folgt aus Gleichung (20) durch Division durch $2\pi \cdot \sin \Theta d\Theta$, also

$$W_{II} = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l (-1)^l P_l(\cos 2\Theta) \left| \cos \Theta \right|^2 \cdot \cos \Theta. \quad (20a)$$

Hiermit sind die Formeln aufgestellt, welche die Streutheorie liefert; weitere Aussagen sind nur auf Grund der experimentellen Arbeiten möglich.

III. Diskussion der Ergebnisse und Vergleichung mit den Messungen.

Wir stützen uns bei der folgenden Diskussion auf die Experimente, welche Harkins, Kamen, Newson und Gans¹⁾ mitgeteilt und nach der meßtechnischen Seite hin ausführlich besprochen haben. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in zwei Figuren²⁾ resümiert, welche unseren Funktionen (20) und (20a) unmittelbar entsprechen. Wie in der zitierten Arbeit näher erörtert wird, ist es nicht möglich gewesen, einen homogenen Neutronenstrahl, d. h. Neutronen gleicher Anfangsgeschwindigkeit herzustellen, welcher

¹⁾ W. Harkins, M. Kamen, H. Newson u. D. Gans, Phys. Rev. **50**, 980, 1936. — ²⁾ Vgl. Fig. 1 und 2.

Umstand den Wert der Messungen¹⁾ beeinträchtigt, besonders, da die Theorie, wie die Form der Argumente in Gleichung (15) zeigt, eine ent-

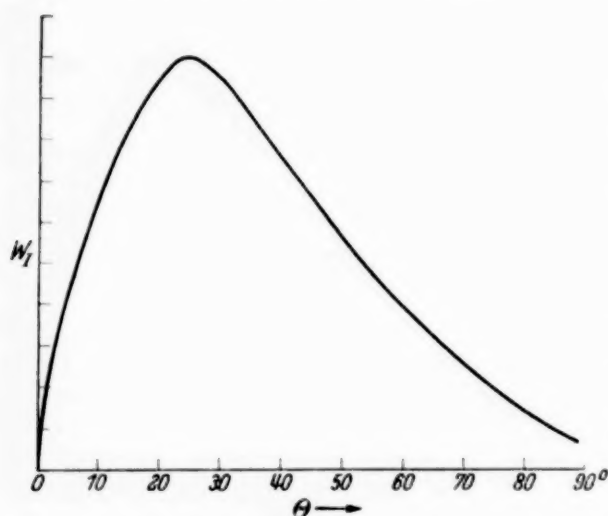


Fig. 1. Experimentelle Kurve.

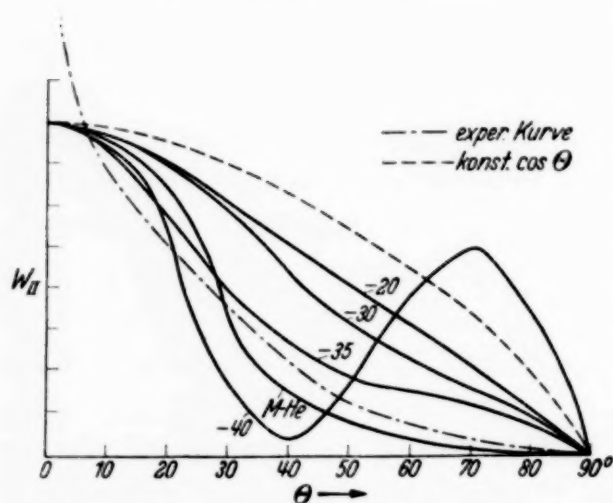


Fig. 2. Die zu den Kurven geschriebenen Zahlen geben die Potentiale an, mit welchen die betreffenden C_1 -Werte berechnet worden sind. Zu den C_0 -Werten gehört in allen diesen Fällen das Potential -18 .

Die Kurve $M-He$ ist die Kurve mit Majorana-Heisenberg-Kraft (24').

zu beachten, daß die letzten dort genannten Arbeiten die Ergebnisse von Harkins u. a. eher bestätigen. In der zuletzt genannten Arbeit dieser Zusammenstellung, welche sphärische Symmetrie angibt, sind Neutronen der Energie 2,6 MV verwendet worden, so daß von einem direkten Widerspruch zur Arbeit von Harkins u. a., deren Neutronen größtenteils von höherer Energie sind, nicht gesprochen werden muß, da ja eine Veränderung des Arguments kr_0 die Resonanzstellen wesentlich verschieben kann. Es sei jedoch hier bemerkt, daß der im folgenden durchgeführte Rechnungsvorgang nicht notwendig an die benutzten Experimente gebunden ist und auch brauchbar bliebe, wenn sich diese Messungen als falsch erweisen sollten.

schiedene Abhängigkeit von der kinetischen Energie der einfallenden Neutronen erwarten läßt. Schon deshalb wäre es unkritisch gewesen, die numerischen Rechnungen präzisionsmäßig auszuführen und mit rechnerischer Akribie über prinzipielle Ungenauigkeiten hinwegzutäuschen. Wir betrachten die experimentellen Kurven als durch Mittelbildung über einen Energiebereich von ungefähr 60000 bis 15 Millionen e-Volt entstanden; genau genommen müßte man daher die theoretische Kurve aus den Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Einfallsennergien zusammensetzen und hierbei das Gewicht jeder Einzelwahrscheinlichkeit der Energieverteilungskurve der einfallenden Neutronen entnehmen. Dieser Vorgang wäre aber äußerst

¹⁾ Die Unsicherheit dieser Streuungsexperimente zeigt drastisch die Zusammenstellung bei S. Share u. I. Stehn, Phys. Rev. **52**, 49, 1937; indessen ist

mühsam und wird überdies durch die Unsicherheit der Verteilungskurve illusorisch; wir haben deshalb mit dem Wert $E_0 = 4 \text{ MV}^1$) (der Stelle des Maximums in der Verteilungskurve), die Rechnungen als eine Art Überschlagsrechnung, ohne Anspruch auf die Genauigkeit mehrerer Dezimalstellen, durchgeführt.

1. Bevor wir die numerischen Ergebnisse mitteilen, wollen wir zwei Folgerungen aus den Formen der beiden experimentellen Streukurven ziehen: Die Kurve der Streuung in die Kugelzone weist ein steiles Maximum in der Nähe von $\Theta = 25^\circ$ auf und fällt gegen 90° zu monoton ab. Aus der Tatsache allein, daß die Kurve nicht symmetrisch zum Punkt $\Theta = 45^\circ$ ist, kann die Symmetrisierung der Wellenfunktionen, d. h. die Annahme quantenmechanisch gleichartiger Teilchen, welche zur Formel (17b) geführt hat, für den vorliegenden Fall als unberechtigt erwiesen werden, da diese Formel, wie sogleich gezeigt werden wird, eine in bezug auf $\Theta = 45^\circ$ symmetrische Kurve liefert. Gleichung (17b) stellt nämlich, nach Substituierung von ϑ durch Θ nach Gleichung (19) eine Funktion dar, welche gegenüber der Transformation $\Theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \Theta$ invariant ist. Denn die erste Summe in der Gleichung (17b) enthält nur Kugelfunktionen mit geradem Index, so daß nach Multiplikation dieser Summe mit der konjugiert-komplexen nur Glieder der Form $P_{2n}(\cos 2\Theta) \cdot P_{2m}(\cos 2\Theta)$ vorkommen; im Betrage der zweiten Summe hingegen stehen nur Glieder: $P_{2n+1}(\cos 2\Theta) \cdot P_{2m+1}(\cos 2\Theta)$. Alle diese Ausdrücke und auch der gemeinsame Faktor $\sin 2\Theta$ sind aber invariant gegen die Transformation $\Theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \Theta$, welche den Übergang des Winkels Θ in den in bezug auf $\Theta = 45^\circ$ symmetrisch gelegenen Winkel bedeutet.

2. Die Kurve auf Fig. 2 hat die auffallende Eigenschaft, daß ihre Tangente an der Stelle $\Theta = 0$ einen Winkel $\neq 0$ mit der Abszissenachse bildet. Nun enthält die entsprechende Funktion W_{II} den Winkel Θ nur in der Verbindung $\cos \Theta$, also $W_{\text{II}}(\Theta) = f(\cos \Theta)$. Für eine solche Funktion gilt nun

$$\frac{df(\cos \Theta)}{d\Theta} = - \{f'(x)\}_{x=\cos \Theta} \cdot \sin \Theta,$$

welcher Ausdruck für $\Theta = 0$ immer 0 ist, sofern nur $f(x)$ an dieser Stelle keine Singularität besitzt, was in unserem Falle sicherlich erfüllt ist. Deshalb also müßte die Kurve an der Stelle $\Theta = 0$ mit horizontaler Tangente ein-

¹⁾ 1 MV bedeutet 1 Million Elektronenvolt.

münden, in krassem Gegensatz zur experimentellen Kurve. Wir legen diesem Widerspruch jedoch wegen der Unsicherheit der experimentellen Kurve in der Umgebung der Stelle $\Theta = 0$ nicht allzu viel Gewicht bei und werden ihn im weiteren ignorieren. Dessenungeachtet sei kurz darauf hingewiesen, daß der Separationsansatz (4'), welcher die reine Cosinusabhängigkeit unserer Funktion W_{II} hervorgerufen hat, im mathematischen Sinne, abgesehen von physikalisch-anschaulicher Plausibilität, die Lösungsmannigfaltigkeit der Gleichung (4) nicht erschöpft. Der Ansatz (4') würde — man vergleiche hierzu die analogen Überlegungen bei der Fourierschen Lösung in der Theorie der schwingenden Saite — dann gerechtfertigt sein, wenn die daraus resultierende allgemeine Lösung

$$\psi = \frac{1}{r} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \chi_l(r) \cdot a_l P_l(\cos \vartheta)$$

jeder geeigneten Anfangsbedingung angepaßt werden könnte, z. B. für $r = \text{Const}$: $\psi = f(\vartheta)$, wobei $f(\vartheta)$ willkürlich (höchstens mit gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen) vorgegeben sein könnte. Dies erfordert aber die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion $f(\vartheta)$ nach den Kugelfunktionen $P_l(\cos \vartheta)$, welche natürlich im allgemeinen nicht statthat, während bekanntlich die Entwicklung einer solchen Funktion nach $P_l(\vartheta)$ in der Regel möglich ist.

3. Bei der Kurvendiskussion werden wir uns auf die Streuung in die Einheit des räumlichen Winkels beziehen, um die Vergleichung mit der Literatur zu erleichtern, in welcher im allgemeinen dieser Weg eingeschlagen wird; im Prinzip ist es selbstverständlich belanglos, ob man mit den Kurven W_I oder W_{II} operiert. Wir bringen also die Gleichung (20a) auf die zur numerischen Behandlung notwendige endliche Form, was selbstverständlich Vernachlässigungen erfordert. Diese Vernachlässigungen, welche die angenommene Konvergenz der Reihe mit einer prinzipiell feststellbaren Fehlergrenze erlaubt, sind nicht mit den unbestimmten Näherungsrechnungen zu verwechseln, welche in der Literatur häufig zur Bestimmung der C_l bzw. der entsprechenden Phasenverschiebungen δ_l verwendet werden. Nun sind, wie die numerischen Rechnungen in Spezialfällen erwiesen haben, die Beträge der Größen C_l für $l \geq 2$ von entschieden niedrigerer Größenordnung gegenüber den C_0, C_1 , so daß man erwarten darf, bei Vernachlässigung der C_l ($l \geq 2$) die wesentlichen Eigenheiten des Effekts in befriedigender Näherung darzustellen.

Der praktisch willkürliche Faktor vor der Summe ist in den Formeln fortgelassen, für die Figuren aber so bestimmt worden, daß, wie dies in der

Literatur üblich ist, für die Schar W_{II} an der Stelle $\Theta = 0$ die Kurven durch denselben Punkt gehen; dieser Vorgang ist berechtigt, da wir uns hier nur für die Übereinstimmung jeder einzelnen Kurve mit der experimentellen, d. h. für die Frage der Eignung bestimmter Potentiale interessieren. Wir schreiben also nach Gleichung (20a):

$$W_{II} = |C_0 P_0(\cos 2\Theta) - 3 C_1 P_1(\cos 2\Theta)|^2 \cdot \cos \Theta,$$

setzen $C_0 = \gamma_0 + i\delta_0$, $C_1 = \gamma_1 + i\delta_1$ und erhalten:

$$W_{II} = \{|C_0|^2 - 6(\gamma_0\gamma_1 + \delta_0\delta_1) \cdot \cos 2\Theta + 9|C_1|^2 \cdot \cos^2 2\Theta\} \cdot \cos \Theta. \quad (21)$$

In der Formel (15) zur Berechnung der C_l kommen die Größen E , r_0 , V vor; über E ist schon verfügt worden, für r_0 nehmen wir durchgehend den Wert $3 \cdot 10^{-13}$ cm an, welcher größenordnungsmäßig paßt. Die Berechtigung dieser willkürlichen, den Ergebnissen vorgreifenden Wahl wird aus der Tatsache deutlich werden, daß man mit diesem Werte die Experimente beschreiben und auf wenigstens relativ eindeutige Weise das Potential V ermitteln kann, während eine solche Bestimmung, beide Parameter r_0 und V betreffend, von der praktischen Schwierigkeit gar nicht zu reden, undurchführbar wäre. So reduzieren sich unsere theoretischen Kurven auf eine einparametrische Schar, wobei freilich noch eine Annahme über den verwendeten Permutationsoperator vorausgesetzt ist, dessen Einfluß wir im weiteren Verlaufe sukzessive besprechen werden. — Wie die nachstehende Tabelle ¹⁾ erläutert, ändern sich die C_0 viel langsamer als die C_1 mit dem Potential, so daß im Groben die Form der Kurve von dem bei der Berechnung von C_1 benutzten V abhängen wird, weshalb wir aus den Streukurven den geeigneten Wert des Potentials für $l=1$ werden entnehmen können. Überhaupt ist die Abweichung der C_1 -Werte von 0 ein Maß der Abweichung der Streukurve W_I von der klassischen, nämlich $\text{Const} \cdot \sin 2\Theta$, welche

Tabelle 1.

V	C_0	C_1	V	C_0	C_1
— 18	— 1,4 — $i \cdot 0,9$	+ $i \cdot 0,07$	— 40	— 1 — i	— 2
— 20	— 1,5 — $i \cdot 0,8$	+ $i \cdot 0,1$	— 44	— 0,7 — $i \cdot 0,9$	— 0,5 — 0,9 i
— 25	— 1 — i	— 0,01 + $i \cdot 0,2$			
— 30	— 1,1 — i	— 0,02 + $i \cdot 0,2$	+ 18	—	— $i \cdot 0,03$
— 35	— 1 — i	— 0,2 + $i \cdot 0,6$	+ 35	— 0,4 — $i \cdot 0,8$	— $i \cdot 0,05$

¹⁾ Die numerischen Rechnungen auf Grund von Gleichung (15) sind unter Verwendung der Tafeln der Besselschen Funktionen von Keiichi Hayashi, Berlin 1930, ausgeführt worden.

symmetrisch zu $\Theta = 45^\circ$ liegt, wo sie ihr Maximum erreicht, bzw. der Kurve W_{11} von $\text{Const} \cdot \cos \Theta$. Wir leiten nun die Formel $|C_l + 1|^2 = 1$ ab, welche eine, wenn auch nicht sehr scharfe Kontrolle zur numerischen Rechnung bietet; sie beruht auf Gleichung (15) und der für alle reellen x und λ geltenden Relation $I_\lambda(x) = \Re(H_\lambda^{(1)}(x))$; sie gilt aber auch für imaginäre n , weil $n \frac{I'_{l+1/2}(nkr_0)}{I_{l+1/2}(nkr_0)}$ auch dann reell bleibt. Man erhält nach

einfacher Rechnung für $C_l + 1$ einen Ausdruck der Form $-\frac{A - iB}{A + iB}$

(A, B reell), dessen Betragsquadrat 1 ist. Deshalb darf man auch $C_l + 1 = e^{2i\delta_l}$ setzen und erreicht mit δ_l als Phasenverschiebung der Partikularwelle Anschluß an die Mottische Theorie. Aus $C_l = e^{2i\delta_l} - 1$ folgt: $|C_1|^2 = 2(1 - \cos 2\delta_l)$, welcher Ausdruck sein Maximum für $\delta_l = \pi/2$ erreicht, also wenn $C_l = -2$. Gleichung (15) ergibt mit $H_\lambda^{(1)} = I_\lambda + iN_l$

für C_l die Form $-2 \frac{\alpha}{\alpha + i\beta}$. Der Fall $C_l = -2$ tritt ein, wenn der Bruch

den Wert 1 annimmt, also wenn der Imaginärteil des Nenners verschwindet. Die Resonanzbedingung lautet¹⁾ also:

$$n \frac{I'_{l+1/2}(nkr_0)}{I_{l+1/2}(nkr_0)} = \frac{N'_{l+1/2}(kr_0)}{N_{l+1/2}(kr_0)}.$$

Für $l = 0$ heißt diese Gleichung mit denselben Zahlenwerten wie bisher: $n \cdot \text{ctg}(n \cdot 38^\circ) = 0,78$; ihre kleinste reelle Lösung ist $n = 2,8$, was $V = -14$ MV zur Folge hat. Die nächstfolgende Wurzel der Gleichung führt schon zu einem Wert $|V| \geq 96$ MV; es liegt also keine Resonanzstelle von C_0 in dem betrachteten Intervall. Die Resonanzgleichung für $l = 1$

lautet: $1,5 \frac{x^2 \sin x}{\sin x - x \cos x} = 0,43$, wobei $x = nkr_0 = 0,66 \cdot n$. Die erste

Resonanzstelle ist: $n = 4,6$, $V = -40$ MV, welche in unserer Tabelle vorkommt, die nächstfolgende: $n = 9$, $V = -162$ MV geht weit über unseren Potentialbereich hinaus. Es sei in diesem Zusammenhang gleich bemerkt, daß man wegen der Quasiperiodizität der Besselschen Funktionen für reelles Argument vermutlich beliebig viele Potentiale angeben könnte, aus denen sich geeignete C_l -Werte berechnen ließen. Doch die obigen Mitteilungen über den weiten Abstand der Resonanzstellen zeigen, daß man gänzlich unwahrscheinlich hohe Potentiale verwenden müßte, um die Reihe der Tabellenwerte für C_1 noch einmal zu erhalten. Zur Bestimmung

¹⁾ Th. Sexl, ZS. f. Phys. **99**, 763, 1936.

der rein imaginären Lösungen n , welche zu positiven Potentialen $V > E$ gehören, setzt man $n = i \cdot r$ ($r \geq 0$); dann gilt für $l = 0$: $r \cdot \text{Ctg}(r \cdot 0,66) = -0,78$, welche Gleichung keine Lösung besitzt, weil $\text{Ctg } x > 0$ (x reell); für $l = 1$: $-1,5 \frac{x^2 \text{Sin } x}{\text{Sin } x - \text{Cos } x} = 0,43$ ($x = r \cdot 0,66$). Auch diese Gleichung besitzt, wie eine eingehendere Untersuchung lehrt, keine Lösung mit reellem, positivem r . Es gibt also nur reelle Resonanzstellen; denn n ist entweder reell oder rein imaginär. Da die C_l in der Nähe der Resonanzstellen sich schnell ändern, erklärt deren Verteilung das oben beschriebene Verhalten der C_0 - und C_1 -Werte.

4. Tragen wir nun die zu bestimmten Potentialen gehörigen Wertequadrupel unserer Tabelle in Gleichung (21) ein, so erhalten wir die Kurvenschar des Wignerschen Kraftgesetzes, welche mit der Schar in Fig. 2 ungefähr übereinstimmt. Auf diese Weise ergibt sich $V = -35$ MV als brauchbarer Wert, welchen wir nun auch an dem Problem der Deuteron-Bindungsenergie erproben müssen. Dem beobachteten Zustand des Deuterons wird allgemein die Lösung (4') mit $l = 0$ und $E = -\varepsilon = -2,15$ MV zugewiesen; der Wert von ε ist dabei recht sicher. Im Außenraum gilt demnach:

$$\chi_a''(r) - \frac{M}{\hbar^2} \varepsilon \chi_a(r) = 0,$$

also $\chi_a(r) = c_a e^{-\frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar} \cdot r}$; die Partikularlösung $e^{+\frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar} \cdot r}$ ist nicht brauchbar da die Wellenfunktion $\psi = \frac{1}{r} \chi_a(r)$ für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren soll, damit sie ein gebundenes System darstelle. Im Innenraum gilt

$$\chi_i''(r) + \frac{M}{\hbar^2} (-V - \varepsilon) \cdot \chi_i(r) = 0;$$

wegen der an der Stelle $r = 0$ zu fordernden Regularität muß $-V - \varepsilon > 0$ sein, sonst würde man eine exponentielle Lösung $\frac{e^{\alpha r}}{r} \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow 0$ erhalten; von den beiden Partikularlösungen für $-V - \varepsilon > 0$ kommt nur die Sinuslösung in Frage, da die Cosinuslösung ebenfalls die Regularitätsforderung verletzen würde. Also gilt

$$\chi_i(r) = c_i \sin \left(\frac{\sqrt{M(-V - \varepsilon)}}{\hbar} \cdot r \right).$$

Die Stetigkeitsbedingungen geben, ähnlich wie die Gleichung (14),

$$\chi_a(r_0) = \chi_i(r_0), \quad \chi'_a(r_0) = \chi'_i(r_0),$$

woraus die Eigenwertgleichung für ε folgt, nämlich

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\sqrt{M(-V-\varepsilon)}}{h} \cdot r_0 \right) = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{-V-\varepsilon}}. \quad (22)$$

Mit den Zahlenwerten für M, h, ε und r_0 geht Gleichung (22) in $\operatorname{ctg}(0,48 \cdot x) = -\frac{1,47}{x}$ über, worin $x = \sqrt{-V-2,15}$, wenn V nach MV gezählt wird.

Die kleinste Lösung dieser Gleichung ist $V = -18$ MV; die nächste der unendlich vielen Lösungen würde schon über $|V| = 100$ MV hinausgehen. Zwischen den Ergebnissen der Streutheorie und denen der Deuterontheorie besteht also bei Verwendung von reinen Wigner-Kräften ein deutlicher, unüberbrückbarer Widerspruch, welcher auch nicht geringer wird, wenn man den Wirkungsradius variiert. Für $r_0 = 2 \cdot 10^{-13}$ cm z. B. ergibt zwar Gleichung (22) $V = -34$ MV; doch das Potential $V = -35$ MV würde dann $C_1 = i \cdot 0,01$ liefern, was zur Erklärung der Streukurve gänzlich unzulänglich wäre. Im allgemeinen: je kleiner r_0 , desto größer der Wert von $|V|$ aus Gleichung (22), desto größer aber in stärkerem Maße das zur Darstellung der Streukurve notwendige Potential $|V|$. Daraus kann man, unabhängig von Erörterungen über Kernaufbau und Absättigungsphänomene, ersehen, daß gewöhnliche (Wignersche Kräfte) in der gegenwärtigen Fassung der Kerntheorie selbst zur Behandlung des einfachsten Problems nicht hinreichend sind. Auch die Einführung reiner Majorana-Kräfte erleichtert nicht die Auflösung der genannten Schwierigkeit. C_0 muß, wegen der vorgegebenen Bindungsenergie mit dem Werte $V = -18$ MV berechnet werden; demnach hat man im Zustande $l = 1$ das Potential $V = +18$ MV zu verwenden. Der Brechungsindex wird dann imaginär, die Besselschen Funktionen in Gleichung (15) drücken sich durch Hyperbelfunktionen aus. Der Wert von C_1 bleibt weit unter der geforderten Größenordnung, selbst bei höheren positiven Potentialen; dies ist darauf zurückzuführen, daß bei imaginärem Brechungsindex, wie oben erwähnt, keine Resonanzstelle existiert. Reine Heisenberg- oder Bartlett-Kräfte fordern nach Gleichung (17a) die Addition zweier Wahrscheinlichkeitsfunktionen; keine von diesen weicht aber wesentlich von der klassischen Verteilungsfunktion ab. Für Heisenberg-Kräfte z. B. würden sich die Dinge folgendermaßen verhalten: In der ersten Summe im Zustande $l = 0$: $V = -18$ MV, im Zustande $l = 1$: $V = +18$ MV; in der zweiten Summe im Zustande $l = 0$:

$V = +18$ MV, im Zustand $l = 1$: $V = -18$ MV. Nach den früheren Mitteilungen über die numerischen Ergebnisse ist in keinem der beiden Fälle C_1 von der notwendigen Größenordnung. Hieraus folgt nun, daß keine der vier Krafttypen für sich allein der Theorie auch nur zum angenäherten Einklang mit der Erfahrung verhilft; dieser ist aber, vermitteltst gemischter Operatoren, d. h. Linearkombinationen der vier Typen, auf einfache Weise herzustellen.

5. Wir betrachten zuerst eine Wigner-Majorana-Kraft; dann stehen uns gerade zwei Unbekannte, nämlich das Wignersche und das Majorana-sche Potential zur Verfügung, wodurch wir den beiden Bedingungen, der Festlegung von C_0 durch die Bindungsenergie und der Bestimmung von C_1 aus der Streukurve bei bekanntem C_0 , genügen können. Für $l = 0$ muß man fordern: $V_m + V_w = -18$, für $l = 1$: $-V_m + V_w = -35$, wie die Fig. 2 zeigt. Dann gilt: $C_0 = -1,4 - i \cdot 0,9$, $C_1 = -0,2 + i \cdot 0,6$; die Wahrscheinlichkeitsfunktion (21a) lautet: $W_{II} = (2,8 + 3,6 \cdot \cos^2 2\Theta + 1,6 \cdot \cos 2\Theta) \cdot \cos \Theta$. Diesen C_l -Werten entsprechen in der Mott'schen Theorie die Werte: $\delta_0 = 123^\circ$, $\delta_1 = 18^\circ$. Es würde gelten: $|V_w| > |V_m|$; gegen dieses Ergebnis muß aber ein schwerwiegender Einwand erhoben werden; denn die Kerntheorie hat ein deutliches Überwiegen der Austauschkräfte über die gewöhnlichen als recht wahrscheinlich aufgezeigt.

6. Nun ist aber die eben gegebene Lösung nur ein Spezialfall eines allgemeinen Ansatzes, welcher mit der Theorie der schweren Kerne eher in Einklang gesetzt werden kann: $V = V_w + V_m \cdot P_m + V_h \cdot P_h + V_b \cdot P_b$, wobei die P_m usw. die entsprechenden Permutationsoperatoren bezeichnen. Die Berechnung der Streukonstanten C_0 und C_1 würde nach dem folgenden Schema geschehen:

$$\begin{array}{l} \text{Tripletzustand:} \\ \text{Singulettzustand:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} l = 0: V_w + V_m + V_h + V_b = -18, \\ l = 1: V_w - V_m - V_h + V_b = a; \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} l = 0: V_w + V_m - V_h - V_b = b, \\ l = 1: V_w - V_m + V_h - V_b = c. \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (23)$$

Die Werte a, b, c müßten so gewählt werden, daß die mit ihnen errechnete Funktion (17a) zur experimentellen Streukurve paßt. Ihre Gewinnung verlangt die Konstruktion einer dreiparametrigen Kurvenschar und Vergleichung derselben mit der experimentellen Kurve. Eine solche Schar wird im allgemeinen die angenäherte Form jeder Kurve mehrfach enthalten und kann deshalb kaum einen fortschreitenden Gang zeigen wie z. B. unsere

einparametrische Schar in Fig. 2, so daß eine *eindeutige* Ermittlung der Werte a, b, c nicht erwartet werden darf. Also ist auch die eindeutige Bestimmung der Potentiale nach Gleichung (23) unmöglich. Abgesehen davon ist die algebraisch eindeutige Auflösbarkeit des Systems (23) bei bekannten a, b, c nur als zufällig anzusehen, solange man diese Gleichungen nicht für einen ausgedehnten Bereich von E -Werten aufgestellt hat; alle diese linearen Gleichungen müßten sich dann auf vier unabhängige reduzieren. Ein solches System könnte aber nur auf Grund neuer Experimente mit wirklich homogenen Neutronenstrahlen gebildet werden. Auch ist es selbstverständlich ohne Bedeutung, daß zu vier unbekannten Potentialen gerade vier Gleichungen gehören, weil dies lediglich auf dem Abbrechen der unendlichen Reihe mit $l = 1$ beruht. Es zeigt sich also, daß die Bestimmung der Potentiale auf Grund des hier verwendeten Materials mit schweren Willkürlichkeiten behaftet ist. Man kann nämlich verschiedene Linearkombinationen von Operatoren angeben, welche unsere experimentellen Forderungen erfüllen; z. B. könnte $a = c = -35$, $b = -18$ gewählt werden; dann wären die beiden Summen in Gleichung (17a) identisch und die Kurve wäre dieselbe wie bei Wigner-Majorana-Kräften. Ein anderes einfaches Beispiel dazu ist die oben angeführte Zusammenstellung von Majorana-Wigner-Kräften; wir deuten nur zur Illustration eine weitere Möglichkeit an, welche besser zur allgemeinen Kerntheorie paßt. Wir benutzen eine Linearkombination von Majorana- und Heisenberg-Kräften, und setzen folgendes Schema als Spezialfall von Gleichung (23) an:

$$\begin{array}{ll} \text{Triplettzustand:} & \left. \begin{array}{l} l=0: V_m + V_h = a \\ l=1: -V_m - V_h = -a \end{array} \right\} \\ \text{Singulettzustand:} & \left. \begin{array}{l} l=0: V_m - V_h = b, \\ l=1: -V_m + V_h = -b. \end{array} \right\} \end{array} \quad (24)$$

Wir erhalten hier also, a und b als schon bekannt vorausgesetzt, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, d. h. relativ eindeutige Auflösbarkeit im Rahmen der Annahme, daß es nur Heisenberg- und Majorana-Kräfte gibt. Da das beobachtete Deuteron ein Triplettzustand ist, so würde $a = -18$ gelten; die Kurve, deren C_0 mit $V = -18$, $C_1 = +18$ errechnet würde, ergäbe nun eine kaum merkbare Abweichung vom klassischen Verlaufe. Andererseits würde in Formel (17a) dieser Summand, wegen des Gewichtungsfaktors 3, gegen den anderen entschieden überwiegen, so daß der gewünschte Funktionsverlauf schwerlich zu erzielen wäre. Um dies zu vermeiden, müßten wir das beobachtete Deuteron dem Singulettzustand

zuschreiben; diese Hypothese darf aber wegen Messungen über Hyperfeinstruktur und Bandenspektren¹⁾ nur als versuchsweise innerhalb unseres Schemas (24) angesehen werden. Aus den Gleichungen (17a) und (21) folgt dann:

$$W = (4 + 7,2 \cos 2\Theta + 10,8 \cos^2 2\Theta) \cdot \cos \Theta, \quad (24')$$

welche Kurve mit der experimentellen ungefähr in Einklang ist²⁾. Alle hier angegebenen Potentialzusammenstellungen haben den Vorteil, daß keine Deuteronzustände außer dem einen *S*-Zustand mit der Bindungsenergie $\varepsilon = 2,15$ auftreten. Diese Forderung muß bei allen aus dem Schema (23) durch Spezialisierung hervorgehenden Linearkombinationen der Potentiale immer gestellt werden, da die Theorie sonst eben unbeobachtete Deuteronzustände angeben würde. Um das absolut-kleinste (selbstverständlich negative, weil anziehende) Potential zu ermitteln, von welchem an für ein bestimmtes *l* ein Deuteron existieren könnte, setze man in der Eigenwertgleichung (22) bzw. in ihrem Analogon für $l = 1$, $\varepsilon = 0$ und berechne hieraus das Grenzpotalential $V_g^{(l)}$. Es ergibt sich: $V_g^{(0)} = 9$, $V_g^{(1)} = 44$. Unsere *P*-Zustände mit dem Potential $V = -35$ geben also, wie verlangt, zu keinem stabilen Deuteronzustand mit $l = 1$ Anlaß. — In ähnlicher Weise kann man natürlich auch andere Kombinationen von Operatoren aufstellen und ihre Anwendbarkeit auf unsere Probleme nach den vorgeführten Gesichtspunkten prüfen. Solange man aber nicht über ernste Anhaltspunkte, die Wahl der Potentiale betreffend, verfügt, müssen diese probeweisen Analysen, welche ja willkürlich und hier gemäß der rechnerischen Bequemlichkeit angestellt worden sind, als gänzlich unverbindlich betrachtet werden. Nach den obigen Bemerkungen ist die Zahl der brauchbaren Kombinationen nicht endlich, so daß man auch durch zahlreiche solche Versuche nicht alle Möglichkeiten erschöpfen kann.

7. Demnach scheint das Ergebnis dieser Untersuchung gänzlich auf der negativen Seite zu liegen, und deshalb mag die Frage nicht unberechtigt sein, ob man von dem uns vorliegenden Material überhaupt weitergehende Entscheidungen erwarten dürfe. Im Gegensatz zu den anderen Streuproblemen, bei welchen die anomale Streuung als ein Sekundäreffekt der klassischen (Rutherford'schen) überlagert ist, hat unser Phänomen, wie schon erwähnt, sozusagen kein klassisches Fundament. Bei jenen Problemen sind also Vernachlässigungen weit eher erlaubt als bei diesen, da hier nur

¹⁾ Vgl. z. B. Th. Sexl, *Naturwissensch.* **25**, 153, 1937; P. Jordan, *Ergebn. d. exakt. Naturwissensch.* **16**, 57, 1937. — ²⁾ Vgl. Fig. 2.

die anomale, d. h. die durch das Potentialloch bewirkte Streuung vorhanden ist. So hat man auch tatsächlich die anomale Streuung bei Beschränkung auf das erste Glied der Streuformel, d. h. das Glied mit $l = 0$, bei einigen Problemen befriedigend darstellen können. Dann treten höchstens zwei Potentiale, nämlich [vgl. Gleichung (23)], $V_w + V_m$ und $V_h + V_b$ auf, wodurch schon eine entscheidende Vereinfachung erzielt ist. Denn während das experimentelle Material, jedenfalls bei seiner heutigen Ungenauigkeit, für unser Problem zur Bestimmung der vier Potentiale nicht ausreicht, können zwei bestimmte davon in manchen Fällen eindeutig errechnet werden. Hätte man sich von Anfang an auf zwei solche Potentialarten beschränkt, so wäre die gewünschte Eindeutigkeit zu erlangen gewesen. Dieser Vorgang wäre auch, wenn nur der Zustand $l = 0$ betrachtet würde, korrekt; da es aber in unserem Falle sicherlich nicht gestattet ist, C_1 zu vernachlässigen, wäre diese Eindeutigkeit nur durch eine unkritische *petitio principii*, nämlich eine erst zu beweisende Voraussetzung über die anzuwendenden Operatoren, ermöglicht worden. Der unseren Lösungen anhaftende Mangel an Eindeutigkeit dürfte also darin begründet sein, daß das hier untersuchte Problem in die Frage der Potentialoperatoren tiefer eingreift als die anderen Streuprobleme. So gesehen behält die Unbestimmtheit unserer Folgerungen über die Operatoren nichts Verblüffendes: Wir haben eben nur Bedingungsgleichungen aufstellen können, welchen die Lösungen genügen müssen; daß diese Bedingungsgleichungen zur endgültigen eindeutigen Lösung nicht ausreichen, heißt aber nicht, daß unsere Folgerungen rein negativ sind.

8. Es seien nun die Ergebnisse zusammengefaßt, welche sich ohne zusätzliche Hypothesen aus der Vergleichung von Theorie und Erfahrung haben erschließen lassen: *Proton und Neutron sind nicht quantenmechanisch gleichartig; das wirkende Potential ist eine Linearkombination von mindestens zwei verschiedenen Potentialoperatoren, also keinesfalls eine gewöhnliche Funktion; die Hypothese des einfachen Potentialloches genügt zur Beschreibung der vorliegenden Experimente.*

9. Wir wollen nun kurz über andere theoretische Arbeiten auf diesem Gebiet referieren, wobei wir aber auf Vollständigkeit verzichten müssen, da die Besprechung der Untersuchungen über verwandte Probleme, die ja zur Vollständigkeit erforderlich wäre, uns zu weit von unserem Ausgangspunkt wegführen würde. Integraleffekte, wie z. B. der totale, integrale Wirkungsquerschnitt, im Gegensatz zum differentiellen, hängen weit weniger von der speziellen Wahl der Potentiale ab, so daß konkrete Annahmen über dieselben zur Behandlung solcher Probleme oft gar nicht notwendig

sind¹⁾. In der Literatur wird meistens angenommen²⁾, daß die Streuung von Neutronen an Protonen im System der Relativkoordinaten für die Einheit des räumlichen Winkels sphärisch-symmetrisch, d. h. unabhängig von ϑ sei, also $C_l = 0$, $l \geq 1$, wenn nur die Energie der einfallenden Neutronen kleiner bleibt als 20 MV. Wir wollen die Näherungsrechnungen, die zur Stütze dieser Behauptung dienen, nicht im einzelnen kritisieren, da sie wohl keinem Leser zwingend erscheinen, sie beruhen häufig auf der Vernachlässigung von Größen gleicher Ordnung gegeneinander, z. B. von r_0 gegen $\lambda = 1/k$. Unsere Rechnungen liefern eine direkte Widerlegung des genannten Satzes, jedenfalls für Neutronenenergien von ungefähr 4 MV. Morse u. a.³⁾ verwenden in ihren einschlägigen Arbeiten ein recht kompliziertes exponentielles Potential mit mehr als zwei Parametern (ein Potentialloch ist durch die zwei Parameter r_0 und V bestimmt). Dies versuchen die Autoren zu rechtfertigen, indem sie auf den Widerspruch zwischen den experimentellen Arbeiten von Harkins u. a. und der Theorie nach Bethe, welcher ein Lochpotential benutzt, hinweisen; diese Argumentation ist aber nach dem obigen hinfällig. Übrigens ergeben die theoretischen Kurven dieser Autoren erst für $E_0 = 25$ MV Übereinstimmung mit den experimentellen, was keinesfalls befriedigend ist. Share und Stehn⁴⁾ geben die experimentellen Kurven wieder, indem sie neben den üblichen Kernkräften noch solche mit weit größerem Wirkungsradius verwenden; da man auf direktem Wege dasselbe erreichen kann, wird diese Einführung neuer Krafttypen in die Kernphysik wohl nicht zu empfehlen sein. Schließlich erwähnen wir noch eine Note von Bartlett⁵⁾, worin, ohne Angabe der Potentiale, die Werte der Phasenverschiebungen zu $\delta_0 = 133^\circ$, $\delta_1 = 16^\circ$ angegeben werden, was mit unseren Werten bei Wigner-Majorana-Kräften halbwegs verträglich ist. Von Bedeutung für das Deuteron-Problem ist ferner die Hypothese von der Gleichheit aller Kernkräfte⁶⁾. Gegen die Begründung dieser Hypothese in der zitierten Arbeit ließe sich nun, wie uns scheint, einiges vorbringen; wir wollen uns hier jedoch damit begnügen, die Hypothese a posteriori anzugreifen, indem wir zeigen, daß eine aus ihr gezogene Folgerung zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt. Volz⁷⁾ hat nämlich auf Grund dieser Annahme folgendes Verhältnis der Potentiale V_m usw. zueinander abgeleitet: $V_m : V_w : V_h : V_b = 14 : 5 : -7 : -10$.

¹⁾ Vgl. H. A. Bethe u. R. F. Bacher, l. c. S. 117. — ²⁾ Vgl. H. A. Bethe u. R. F. Bacher, l. c. S. 116, 119ff. — ³⁾ P. M. Morse, I. B. Fisk, L. I. Schiff u. W. Shockley, Phys. Rev. **50**, 748, 1936; **51**, 706, 1936. — ⁴⁾ S. Share u. I. Stehn, Phys. Rev. **52**, 48, 1937. — ⁵⁾ I. Bartlett jr., Phys. Rev. **51**, 889, 1937. — ⁶⁾ O. Breit, E. U. Condon u. R. D. Present, Phys. Rev. **50**, 825, 1936. — ⁷⁾ H. Volz, ZS. f. Phys. **105**, 537, 1937.

Stellt man nun die Potentiale für die *S*- und *P*-Zustände mit symmetrischer bzw. antisymmetrischer Spinfunktion auf, so zeigt sich, daß die beiden *S*-Zustände dasselbe Vorzeichen haben, und zwar das entgegengesetzte der beiden *P*-Zustände. Nun müßte für die *S*-Zustände wegen der Existenz des Deuterons ein negatives Potential wirken, also für die *P*-Zustände ein positives; ein solches gibt aber, wie wir gesehen haben, niemals Anlaß zu einer brauchbaren Streukurve. Daran, wie an allen qualitativen Feststellungen, kann die Verwendung eines anderen Potentials statt des Potentialloches nichts ändern, wenn nur dieses Potential in seinen wesentlichen Eigenschaften, wie rascher Abfall und große Tiefe, mit dem Potentialloch übereinstimmt. Andere theoretische Arbeiten zum vorliegenden Streuproblem (nicht zum Problem des totalen Wirkungsquerschnittes, welches weit mehr Beachtung gefunden hat), sind uns nicht bekannt. Weitere Fortschritte auf diesem speziellen Gebiet werden wohl auch eher durch experimentelle als durch theoretische Arbeiten zu erreichen sein.

Der Verfasser möchte auch bei dieser Gelegenheit Herrn Prof. Sexl, auf dessen Anregung hin diese Untersuchung entstanden ist, für zahlreiche wertvolle Ratschläge bei der Arbeit seinen besten Dank sagen.

Wien, Institut für theoretische Physik der Universität.

Über die Fluoreszenz der zweiwertigen Seltenen Erden.

Nachtrag zu der Arbeit: „Verfärbung und Lumineszenz durch Becquerel-Strahlen. IV.“¹⁾

Von **Karl Przibram** in Wien.

(Eingegangen am 2. November 1937.)

Ergänzung der in der genannten Arbeit gemachten Angaben über die Fluoreszenzbanden der zweiwertigen Seltenen Erden durch neuere Beobachtungen an Sm und Tu.

Seit dem Erscheinen der im Titel genannten Arbeit sind weitere Erfahrungen über die Fluoreszenz der zweiwertigen Seltenen Erden gewonnen worden, die das dort Gesagte in so willkommener Weise ergänzen, daß es angezeigt erscheint, sie in einem Nachtrag mitzuteilen.

Früher ist gezeigt worden, daß die blaue Fluoreszenzbande des Fluorits bei $429\text{ m}\mu$ ²⁾ dem zweiwertigen Eu zukommt, die gelbgrüne Tieftemperaturbande der Fluorite aus der Nähe saurer Eruptivgesteine ($570\text{ m}\mu$) dem zweiwertigen Ytterbium. Eine Reihe von Gründen wies auch darauf hin, daß eine rote Bande, die bei manchen Fluoriten, aber auch bei schwach Sm-haltigen EuCl_2 -Präparaten auftritt, dem zweiwertigen Samarium zuzuschreiben sei, ohne daß dies damals bewiesen werden konnte. Dieser Nachweis gelingt aber bei Wahl des CaSO_4 statt des CaF_2 als Grundmaterial³⁾.

Reines CaSO_4 fluoresziert vor der Analysenlampe auch nach Radiumbestrahlung nicht wesentlich. Bei Zusatz von 10^{-3} Gewichtsteilen Sm leuchtet es aber nach der reduzierend wirkenden Ra-Bestrahlung intensiv rot mit einer Bande, deren Lage bei etwa $619\text{ m}\mu$ mit der obenerwähnten nahe übereinstimmt. An diese Bande schließt sich das von R. Tomaschek entdeckte langwellige Linienfluoreszenzspektrum des Sm an.

¹⁾ K. Przibram, ZS. f. Phys. **102**, 331, 1936. Bei dieser Gelegenheit sei eine irrige Angabe daselbst richtiggestellt. Für die Zahl der Farbzentren, die durch ein absorbiertes Quant Röntgenstrahlung in Steinsalz gebildet werden, waren unwahrscheinlich hohe Werte angegeben worden. Wir verdanken Herrn P. Günther, Berlin, den Hinweis, daß diese nur durch ein Versehen in der Umrechnung von r -Einheiten im Energiemaß zustande gekommen sind. Die berichtigten Werte liegen in den plausiblen Größenordnungen 100 bis 1000. Vgl. Wien. Anz. 10. Juni 1937. — ²⁾ Maximum der Schwärzung der Spektralaufnahmen auf Agfa-Isopanplatten. — ³⁾ K. Przibram, Mitt. d. Inst. f. Ra-Forsch. Nr. 389a, Wien. Anz. 3. Dez. 1936.

Hier muß auf eine Arbeit von Gobrecht¹⁾ eingegangen werden. Auf S. 684 der genannten Arbeit sagt Herr Gobrecht: „Dieser Versuch“ (reversible Änderung der Fluoreszenz Eu-haltiger Boraxperlen durch reduzierendes und oxydierendes Erhitzen, verwaschene Bande nach ersterem, scharfe Linien nach letzterem) „wie auch allgemein die Fluoreszenz der Oktohydrosulfate zeigt, daß die Ionen der S. E. in der dreiwertigen Form die scharfen Fluoreszenzlinien geben. Dies steht im Widerspruch zu den Angaben von Przibram, nach welchen reines EuCl_2 vor der Analysenlampe intensiv purpurn leuchtet und das Spektrum eine breite blaue und zwei schmale rote Banden gibt, während EuCl_3 nicht leuchten soll. Um diese Frage zu entscheiden, wurde wasserfreies EuCl_3 hergestellt, welches ähnlich den Fluoriden und Oxyden der S. E. nicht leuchtet. Doch gibt bereits $\text{EuCl}_3 \cdot 1 \text{H}_2\text{O}$ eine prachtvolle Fluoreszenz, die aus roten Linien besteht. Das wasserfreie EuCl_3 wurde längere Zeit im Vakuum geschmolzen, so daß sich ein Teil EuCl_2 bildete, welches im Fluoreszenzspektrum eine blaugrüne breite Bande ohne schmale rote Banden gab.“

Hierzu ist zu bemerken, daß wir den Versuch mit der reversiblen Fluoreszenzänderung durch reduzierendes und oxydierendes Erhitzen schon früher²⁾ an Eu-haltigen CaF_2 ausgeführt haben, was Herrn Gobrecht entgangen zu sein scheint. Ferner könnte diese Darstellung im nicht eingeweihten Leser die Meinung erwecken, ich hätte die zwei roten Banden, die an den EuCl_2 -Präparaten von Jantsch in der Fluoreszenz auftreten, für die bekannten roten Linien des Eu^{+++} gehalten. Diese Verwechslung ist mir nie unterlaufen. In dem im Titel genannten Bericht, den auch Herr Gobrecht schon zitiert, sage ich ausdrücklich, daß die rote Bande (es handelt sich zunächst um die breitere, kürzerwellige) wahrscheinlich dem zweiwertigen Sm zukommt, was später, wie oben angeführt, auch bewiesen werden konnte. Daß Herr Gobrecht nach dem Schmelzen seines EuCl_3 im Vakuum diese rote Bande nicht bekommt, kann zwei Gründe haben: Entweder enthält das Eu-Präparat des Herrn Gobrecht noch weniger Sm als das von Jantsch, oder aber, was mir wahrscheinlicher ist, durch das Schmelzen im Vakuum hat sich zwar das EuCl_2 , nicht aber das wesentlich labilere SmCl_2 gebildet.

Von einem Widerspruch zwischen unseren Befunden kann also derzeit nicht gesprochen werden; die angeführten Versuche des Herrn Gobrecht bestätigen vielmehr die zuerst von mir gemachten Angaben über die

¹⁾ H. Gobrecht, Ann. d. Phys. **28**, 673, 1937. — ²⁾ H. Haberlandt, B. Karlik u. K. Przibram, Mitt. Nr. 336, Wien. Ber. IIa, **143**, 155, 1934.

Fluoreszenz des zweiwertigen Eu und das Nichtfluoreszieren des EuCl_3 , was aus seiner Darstellung allerdings nicht ohne weiteres ersichtlich ist.

Wohl aber besteht derzeit ein Widerspruch in der *Deutung* der längerwelligen schmalen roten Bande und des anschließenden Infrarotspektrums des Sm, das Herr Tomaschek und seine Mitarbeiter dem Sm^{+++} zuschreiben, während wir experimentelle Gründe beigebracht haben, daß dieses Spektrum eher dem Sm^{++} zukommen dürfte¹⁾. Wir erhielten nämlich dieses langwellige Linienspektrum vor der Analysenlampe mit einem schwach Sm-haltigen EuCl_2 -Präparat und nicht mit einem entsprechenden EuCl_3 -Präparat, und bei Einbau von Sm in CaSO_4 nur nach der reduzierenden Ra-Bestrahlung, dann aber sehr intensiv (wenige Minuten Expositionszeit). Aus der Arbeit des Herrn Gobrecht geht hervor, daß seine Fluoreszenzspektren mit einem Kohlenbogen bei 75 Amp. Belastung, lichtstarker Quarzoptik und CuSO_4 -Filter aufgenommen wurden; wir möchten vermuten, daß unter diesen Bedingungen kürzerwelliges Licht in größerer Intensität zur Wirkung gelangt als bei der Analysenlampe, das bei hinreichendem Sm-Gehalt sowie die Radiumbestrahlung fluoreszenzfähige Spuren von Sm^{++} erzeugen und so zum Auftreten des langwelligen Linienspektrums Anlaß geben könnte. Wenn wir Bedenken tragen, dieses Infrarotspektrum mit *Bestimmtheit* dem Sm^{++} zuzuschreiben, so geschieht es nur im Hinblick auf die gute Übereinstimmung, die Tomaschek und Gobrecht bei der theoretischen Berechnung der Terme des Sm^{+++} erhalten haben. Es bleibt abzuwarten, ob die recht komplizierten theoretischen Argumente oder die mir unmittelbarer erscheinenden experimentellen die Oberhand behalten.

Da die verwaschenen, nach der Ra-Bestrahlung auftretenden Fluoreszenzbanden gerade mit jenen S. E. erhalten werden, bei denen zweiwertige Ionen bekannt sind, so konnte man vermuten, daß auch mit Thulium eine derartige Bande zu erhalten wäre, da Jantsch²⁾ bei dieser S. E. wenigstens Anzeichen einer spurenweisen Reduktion zur zweiwertigen Form beobachtet hat. Es wurde deshalb 10^{-3}Tu in CaSO_4 eingebaut und der Ra-Bestrahlung ausgesetzt. Bei Zimmertemperatur zeigte sich vor der Analysenlampe nichts, bei Abkühlung mit flüssiger Luft aber ein glänzend rotes Leuchten³⁾. Die Bande liegt innerhalb der Fehlergrenze an derselben

¹⁾ B. Karlik u. K. Przibram, Mitt. Nr. 396a, Wien. Anz. 13. Mai 1937. Die erforderlichen Agfa-Infrarotplatten verdanken wir Herrn Prof. J. Eggert.

— ²⁾ G. Jantsch u. W. Klemm, ZS. f. anorgan. Chem. **216**, 80, 1933; G. Jantsch, Österr. Chemikerztg. **1937**, Nr. 10. — ³⁾ K. Przibram, Nature **139**, 329, 1937.

Stelle wie die des Sm^{++} ; sie zeigt aber eine entgegengesetzte Temperaturabhängigkeit und ist auch bei gleicher Temperatur aufgenommen, schmaler.

Es zeigen also tatsächlich gerade jene S. E. charakteristische Radio-photofluoreszenzbanden, von denen zweiwertige Formen, wenigstens spurenweise, bekannt sind: Das Paar Eu und Sm vor dem Gd und das Paar Yb, Tu vor dem Cp, und zwar das erste Paar schon bei Zimmertemperatur, das zweite erst bei tieferen Temperaturen. In beiden Paaren gibt die labilere zweiwertige Form (Sm, Tu) die längerwellige Bande, entsprechend der Lockerung des überschüssigen Valenzelektrons.

Daß es sich hier wirklich um eine Fluoreszenz der zweiwertigen S. E. handelt, ist für das erste Paar durch das Verhalten der schwach Sm-haltigen EuCl_2 -Präparate von Jantsch bewiesen: es besteht kein Grund, weshalb es beim zweiten Paar anders sein sollte.

Ein ausführlicher Bericht erscheint demnächst in den Wiener Berichten¹⁾.

¹⁾ B. Karlik u. K. Przibram, Mitt. d. Inst. f. Ra-Forsch. Nr. 399. — *Anmerkung bei der Korrektur* (12. November 1937): Unterdessen erschienen Wien. Ber. IIa, **146**, 209, 1937. Prof. Jantsch hatte seither die Freundlichkeit, uns wieder eine Reihe wertvoller Eu- und Sm-Präparate zur Verfügung zu stellen. Die an diesen gemachten Beobachtungen, über die später berichtet werden soll, bestätigen durchaus die oben vertretenen Anschauungen.